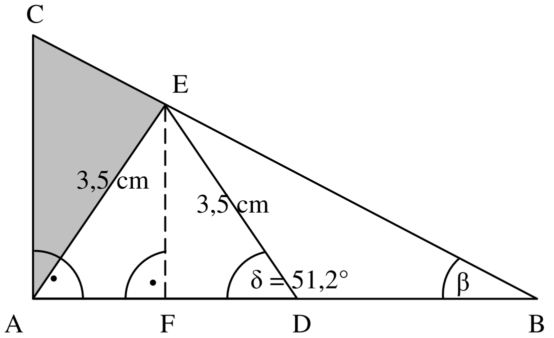
Lösung

Diese Lösung wurde erstellt von Cornelia Sanzenbacher. Sie ist keine offizielle Lösung des Ministeriums für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg.

Wahlteil: Aufgabe 1a



$\overline{AB} = 6{,}5$ cm

1. Berechnung von $\overline{EF}$

$\sin\delta = \frac{\overline{EF}}{\overline{DE}}$

$\overline{EF} = \overline{DE} \cdot \sin\delta$

$\overline{EF} = 3{,}5 \cdot \sin 51{,}2°$

$\overline{EF} = 2{,}73$ cm

2. Berechnung von $\overline{AF}$

$\overline{AF}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{EF}^2$

$\overline{AF}^2 = 3{,}5^2 - 2{,}73^2$

$\overline{AF} = 2{,}19$ cm

3. Berechnung von $\overline{BF}$

$\overline{BF} = \overline{AB} - \overline{AF}$

$\overline{BF} = 6{,}5 - 2{,}19$

$\overline{BF} = 4{,}31$ cm

4. Berechnung von β

$\tan\beta = \frac{\overline{EF}}{\overline{FB}}$

$\tan\beta = \frac{2{,}73}{4{,}31}$

$\beta = 32{,}35°$

5. Berechnung von $\overline{AC}$

$\tan\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \tan\beta$

$\overline{AC} = 6{,}5 \cdot \tan 32{,}35°$

$\overline{AC} = 4{,}12$ cm

6. Berechnung von $\overline{BC}$

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

$\overline{BC} = \sqrt{6{,}5^2 + 4{,}12^2}$

$\overline{BC} = 7{,}7$ cm

7. Berechnung von $\overline{BE}$

$\overline{BE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{BF}^2$

$\overline{BE} = \sqrt{2{,}73^2 + 4{,}31^2}$

$\overline{BE} = 5{,}10$ cm

8. Berechnung von $\overline{CE}$

$\overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE}$

$\overline{CE} = 7{,}7 - 5{,}1$

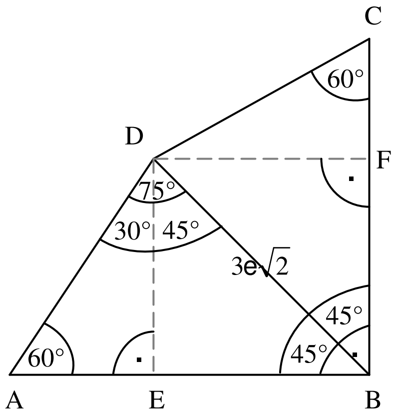
$\overline{CE} = 2{,}6$ cm

9. Berechnung des Umfangs u

$u = \overline{AE} + \overline{CE} + \overline{AC}$

$u = 3{,}5 + 2{,}6 + 4{,}12 = 10{,}22$ cm

Wahlteil: Aufgabe 1b



1. Berechnung von $\overline{BE}$

BFDE ist ein Quadrat, weil der Winkel FBD = 45°, und somit BD die Diagonale in einem Quadrat ist.

$$\overline{BD} = \overline{BE} \cdot \sqrt{2}$$

$$\overline{BE} = \frac{\overline{BD}}{\sqrt{2}} = \frac{3e\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3e$$

$$\overline{BE} = \overline{DE} = \overline{DF} = \overline{BF} = 3e$$

Über die Winkelsumme der Teildreiecke ergibt sich:

Winkel EBD = 45° => Winkel BDE = 45° => Winkel EDA = 30° => Winkel DAE = 60°

Die beiden Dreiecke AED und DFC sind somit kongruent (SWW).

2. Berechnung von $\overline{AE} = \overline{CF}$

$$\tan 60° = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$$

$$\overline{AE} = \frac{\overline{DE}}{\tan 60°} = \frac{3e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3e\sqrt{3}}{3} = e\sqrt{3}$$

$$\overline{CF} = \overline{AE} = e\sqrt{3}$$

3. Berechnung des Flächeninhalts A

$$A = A_{Quadrat} + 2 \cdot A_{Dreieck}$$

$$A = (3e)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3e \cdot e\sqrt{3}$$

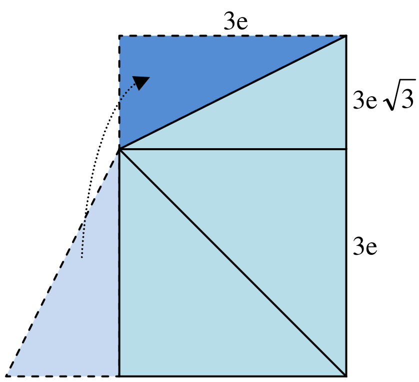
$$A = 9e^2 + 3e^2\sqrt{3}$$

$$A = 3e^2 (3 + \sqrt{3})$$

Ein alternativer Lösungsweg ergibt sich, wenn man die Figur umgestaltet: Schiebt man das Dreieck von der Seite nach oben, so erhält man ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{BE}$ und $\overline{BC}$. Für den Flächeninhalt gilt dann:

$$A = 3e \cdot (3e + e\sqrt{3})$$

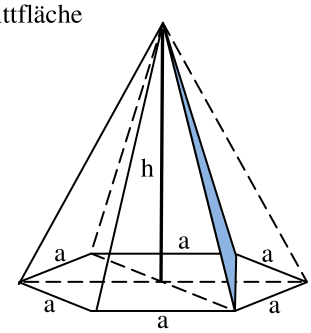
$$A = 3e^2 (3 + \sqrt{3})$$



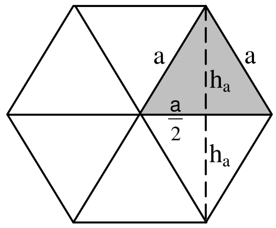
Wahlteil: Aufgabe 2a

Für diese Aufgabe macht man am besten zunächst Skizzen einiger Schnittflächen der Pyramide.

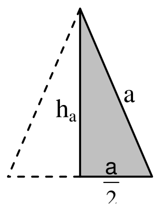
Schnittfläche



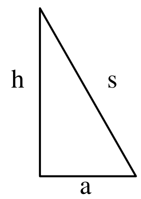
Grundfläche der Pyramide



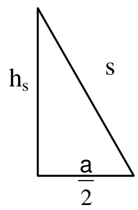
Teildreieck der Grundfläche



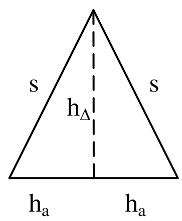
Halbe Diagonal-Schnittfläche der Pyramide



Halbe Seitenfläche der Pyramide



Schnittfläche der neuen (abgeschnittenen) Pyramide



1. Dreieckshöhe (Grundfläche) h_a

$h_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h_a^2 = 3{,}4^2 - 1{,}7^2$

$h_a = 2{,}94$ cm

2. Seitenkante s

$s^2 = h^2 + a^2$

$s^2 = 6{,}7^2 + 3{,}4^2$

$s = 7{,}5$ cm

3. Dreieckshöhe (Pyramide) h_s

$h_s^2 = h^2 + h_a^2$

$h_s^2 = 6{,}7^2 + 2{,}94^2$

$h_s = 7{,}3$ cm

4. Dreieckshöhe (Schnittfläche) h_Δ

$h_\Delta^2 = s^2 - h_a^2$

$h_\Delta = 7{,}5^2 - 2{,}94^2$

$h_\Delta = 6{,}90$ cm

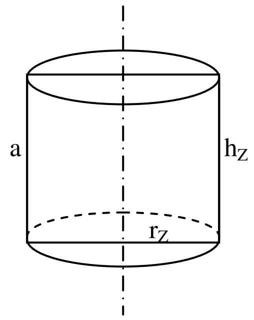
5. Mantel der neuen (abgeschnittenen) Pyramide

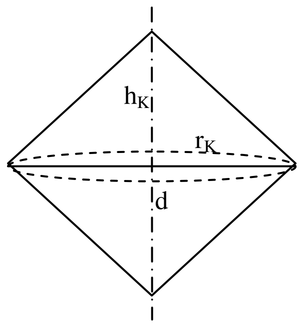
$M = 4 \cdot A_{Seitenfläche} + A_{\Delta}$

$M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h_a \cdot h_{\Delta}$

$M = 2 \cdot a \cdot h_s + h_a \cdot h_{\Delta} = 2 \cdot 3{,}4 \cdot 7{,}3 + 2{,}94 \cdot 6{,}9 = 49{,}64 + 20{,}23 = 69{,}93\ cm^2$

Wahlteil: Aufgabe 2b





Zylinderradius r_Z

$A_{Quadrat} = 36\ cm^2$

Kantenlänge des Quadrats: a = 6 cm

$r_Z = \frac{a}{2}$ $\quad$ $h_Z = a$

$r_Z = 3$ cm $\quad$ h = 6 cm

Grundflächenradius r_K des Doppelkegels

Die Mantellinie s entspricht der Kantenlänge a = 6 cm des Quadrats.

$d = s\sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

d = 8,5 cm

$r_K = \frac{d}{2} = 4{,}24$ cm

Zylinderoberfläche O_{Zyl}

$O_{Zyl} = 2\pi r_z^2 + 2\pi r_z h_z$

$O_{Zyl} = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6$

$O_{Zyl} = 18\,\pi + 36\pi = 54\,\pi$

$O_{Zyl} = 169{,}65\ cm^2$

Kegelmantel M_K

$M_K = \pi \cdot r_K \cdot s$

$M_K = \pi \cdot 4{,}24 \cdot 6$

$M_K = 79{,}92\ cm^2$

Oberfläche des Doppelkegels $O_{Doppelkegel}$

$O_{Doppelkegel} = 2 \cdot M_K$

$O_{Doppelkegel} = 2 \cdot 79{,}92$

$O_{Doppelkegel} = 159{,}84\ cm^2$

Differenz zwischen Zylinder- und Doppelkegeloberfläche

$169{,}65 - 159{,}84 = 9{,}81\ cm^2$

Prozentualer Unterschied

$$p = \frac{PW \cdot 100}{G}$$

$$p = \frac{9{,}81 \cdot 100}{169{,}65}$$

$p = 5{,}78\%$

Wahlteil: Aufgabe 3a

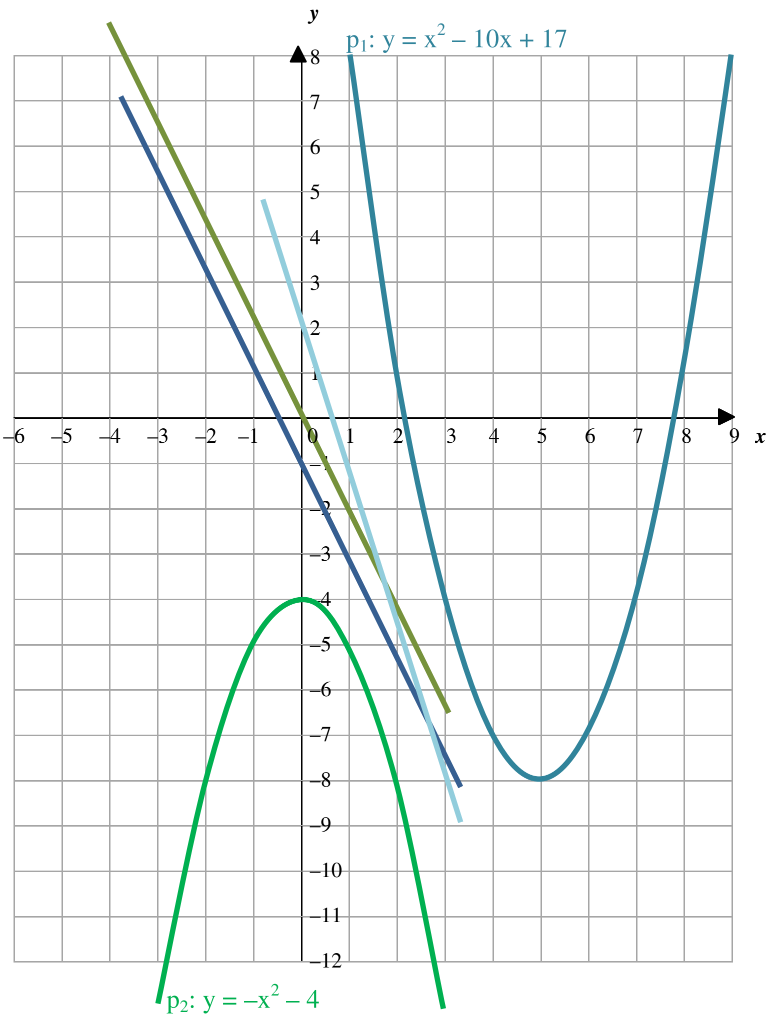
1. Aufstellen der Funktionsgleichung p_1

Die Punkte R(3|-4) und P(7|-4) werden in die Gleichung für Normalparabeln eingesetzt:

$-4 = 3^2 + 3p + q \qquad | -9 \qquad (1)$
$-4 = 7^2 + 7p + q \qquad | -49 \qquad (2)$
$-13 = 3p + q \qquad (1')$
$-53 = 7p + q \qquad (2')$
$(1') - (2') \quad 40 = -4p$
$p = -10 \qquad (3)$
(3) in (1'): $-13 = 3(-10) + q$
$q = 17$
p_1: $y = x^2 - 10x + 17$

Wertetabelle:

x	3	4	5	6	7	8	9
y	–4	–7	–8	–7	–4	1	8



2. Schnittpunkte zwischen p_1 und p_2

Gleichsetzen der Gleichungen von p_1 und p_2:

$$x^2 - 10x + 17 = -x^2 - 4$$

$$2x^2 - 10x + 21 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 - 5x + 10{,}5 = 0$$

$$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 10{,}5}$$

Diskriminante D = 6,25 – 10,5 = – 4,25

Die Diskriminante ist kleiner als Null, es gibt also keine Lösung.

3. Mögliche Gleichungen, die keine gemeinsame Punkte mit den beiden Parabeln haben

Die Geraden können im Koordinatensystem ausprobiert werden.
Die y- Achsenabschnitte der Geraden wählst du am besten ganzzahlig im Bereich –3 bis + 3.
Die Steigung probierst du aus. Sie ist negativ und hat einen Betrag größer als 1.

Beispiele:

$y = -2x$

$y = -2x - 1$

$y = -2x - 2$

$y = -\frac{2}{3}x - 3$

$y = -3x + 1$

$y = -3x + 2$

Wahlteil: Aufgabe 3b

1. Funktionsgleichungen und Scheitel

$p_1: y = -\frac{1}{2}x^2 + 5 \Rightarrow S_1(0|5)$

$p_2: \quad S_2(3|-4) \Rightarrow y = (x-3)^2 - 4$

$y = x^2 - 6x + 5$

2. Nullstellen von p_2

$p_2: \; x^2 - 6x + 5 = 0$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5} = 3 \pm \sqrt{4}$

$x_1 = 3 + 2 = 5; \; x_2 = 3 - 2 = 1$

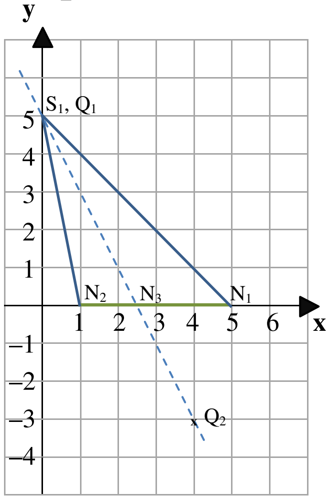
$N_1(5|0)$; $N_2(1|0)$

3. Fläche des Dreiecks $N_1N_2S_1$:

Grundseite: $\overline{N_1N_2} = 4$ LE

Höhe (liegt außerhalb des Dreiecks): h = 5 LE

$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10 FE$



4. Berechnung der Schnittpunkte von p_1 und p_2

$p_1 \times p_2: -\frac{1}{2}x^2 + 5 = y = x^2 - 6x + 5$

$0 = \frac{3}{2}x^2 - 6x \qquad | \cdot 2$

$0 = 3x^2 - 12$

$0 = 3x(x-4)$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$x_1 = 0$ und $x_2 = 4$

$y_1 = 5$ und $y_2 = -3 \Rightarrow Q_1(0|5)$; $Q_2(4|-3)$

5. Aufstellen der Geradengleichung Q_1Q_2

Aus $Q_1(0|5)$ folgt der y-Achsenabschnitt b = 5:

$y = mx + 5.$

Punktprobe mit Q_2: $-3 = m \cdot 4 + 5$

$m = -2$

$y = -2x + 5$

Nullstelle: $0 = -2x + 5 \Rightarrow N_3(2{,}5|0)$

6. Wird das Dreieck durch $\overline{Q_1Q_2}$ halbiert?

Beide Teildreiecke haben die Höhe h = 5 LE, es entscheidet damit die Grundseite: $N_1N_3 = 1{,}5$LE und $N_3N_2 = 2{,}5$LE.

Damit ist klar, dass Dreieck $N_3N_1S_1$ größer als $N_3N_2S_1$ ist.

Wahlteil: Aufgabe 4a

Für die zwei Spezialwürfel ergeben sich die nebenstehenden Ergebnisse.

	1	**1**	**1**	**1**	**5**	**6**
3	3;1	3;1	3;1	3;1	3;5	3;6
3	3;1	3;1	3;1	3;1	3;5	3;6
3	3;1	3;1	3;1	3;1	3;5	3;6
5	5;1	5;1	5;1	5;1	5;5	5;6
6	6;1	6;1	6;1	6;1	6;5	6;6
6	6;1	6;1	6;1	6;1	6;5	6;6

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt dann:

$$\text{P(min eine Sechs)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} = 44{,}4\%$$

$$\text{P(Pasch)} = \text{P(5;5)} + \text{P(6;6)} + \text{P(6;6)}$$

$$= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 8{,}3\%$$

$$\text{P(kein Pasch)} = 1 - \text{P(Pasch)} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} = 91{,}7\%$$

Berechnung des Erwartungswertes:

$$E = \frac{1}{12} \cdot 8 + \frac{11}{12} \cdot (-1) = -\frac{1}{4} = -0{,}25€$$

Ersetzt man beim ersten Würfel die 5 durch eine 6, so ändern sich die Ergebnisse wie in der zweiten Tabelle.

	1	**1**	**1**	**1**	**6**	**6**
3	3;1	3;1	3;1	3;1	3;6	3;6
3	3;1	3;1	3;1	3;1	3;6	3;6
3	3;1	3;1	3;1	3;1	3;6	3;6
5	5;1	5;1	5;1	5;1	5;6	5;6
6	6;1	6;1	6;1	6;1	6;6	6;6
6	6;1	6;1	6;1	6;1	6;6	6;6

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt nun:

$$\text{P(Pasch)} = \frac{4}{36}$$

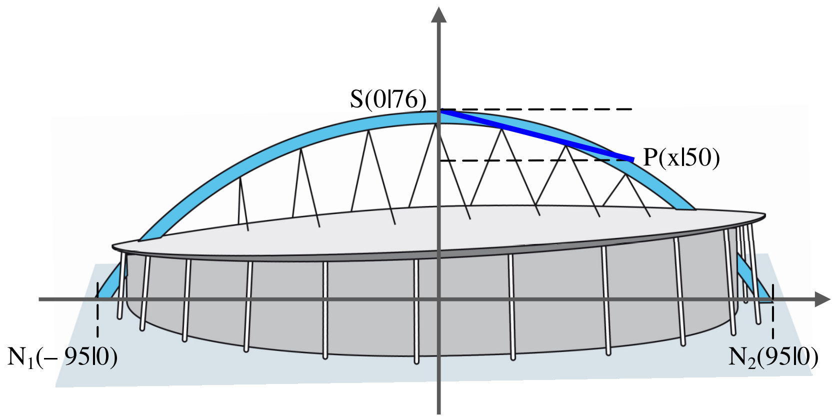
$$\text{P(kein Pasch)} = \frac{32}{36}$$

Erwartungswert:

$$E = \frac{4}{36} \cdot 9€ + \frac{32}{36} \cdot 0€ - 1€ = 0€$$

Das Spiel ist nun fair.
Weil die Anzahl der günstigen Ergebnisse für einen Pasch größer wird, verändert sich auch die Gewinnchance zu Gunsten des Spielers. Der Tausch wäre für den Veranstalter also ungünstig.

Wahlteil: Aufgabe 4b



Aufstellen der Parabelgleichung

Mit dem Scheitel S(0|76) ergibt sich: $y = ax^2 + 76$

Punktprobe mit $N_2(95|0)$: $0 = a \cdot (95)^2 + 76 \Rightarrow a = -\frac{76}{(95)^2} = -\frac{4}{475}$

$y = -\frac{4}{475}x^2 + 76$

Berechnung von x im Punkt P(x|50)

$50 = -\frac{4}{475}x^2 + 76 \qquad | -76$

$-26 = -\frac{4}{475}x^2 \qquad | \cdot \frac{475}{4}$

$x^2 = 3087{,}5 \qquad | \sqrt{\ }$

$x = \pm 55{,}6 \quad \Rightarrow \quad P(55{,}6|50)$

Berechnung der Entfernung zwischen P und S

$\overline{PS}^2 = 26^2 + 55{,}6^2$

$\overline{PS} = 61{,}3$ m