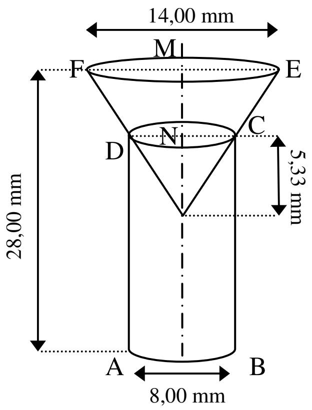
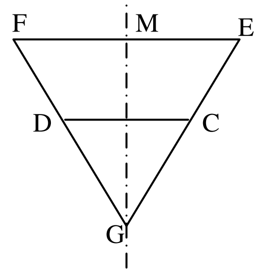
Lösung

Diese Lösung wurde erstellt von Cornelia Sanzenbacher. Sie ist keine offizielle Lösung des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus.

Aufgabe A1

A 1.1 Für die Radien der Niete gilt
Oberer Radius der Pyramide: $r_1 = 7{,}00$ mm
Unterer Radius des Zylinders: $r_2 = 4{,}00$ mm





$\overline{MG}$ wird mit dem Strahlensatz berechnet:

$$\frac{\overline{MG}}{\overline{NG}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{\overline{MG}}{5{,}33} = \frac{14}{8}$$

$$\overline{MG} = \frac{14 \cdot 5{,}33}{8}$$

$$\overline{MG} = 9{,}33 \text{ mm}$$

Damit lässt sich einfach $\overline{MN}$ berechnen, was der Höhe h_{kst} des Kegelstumpfes entspricht, der auf dem Zylinder sitzt.

$$\overline{MN} = \overline{GM} - \overline{NG} = 9{,}33 \text{ mm} - 5{,}33 \text{ mm} = 4{,}00 \text{ mm}$$

Höhe des Zylinders:

$$h_{Zyl} = \overline{MS} - \overline{MN} = 28 \text{ mm} - 4 \text{ mm}$$
$$h_{Zyl} = 24{,}00 \text{ mm}$$

Volumen des Zylinders:

$$V_{Zylinder} = \pi \cdot r_2^2 \cdot h_{Zyl}$$
$$V_{Zylinder} = \pi \cdot (4 \text{ mm})^2 \cdot 24 \text{ mm}$$
$$V_{Zylinder} = 1206{,}37 \text{ mm}^3$$

Volumen des Kegelstumpfes:

$$V_{Kst.} = \frac{1}{3} \pi \cdot h_{Kst} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

$$V_{Kst} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \text{ mm} \cdot ((7 \text{ mm})^2 + 4 \text{ mm} \cdot 7 \text{ mm} + (4 \text{ mm})^2)$$

$$V_{Kst} = 389{,}56 \text{ mm}^3$$

Volumen der Niete:

$$V_{Niete} = V_{Zylinder} + V_{Kegelstumpf}$$
$$V_{Niete} = 1206{,}37 + 389{,}56$$
$$V_{Niete} = 1595{,}93 \text{ mm}^3$$

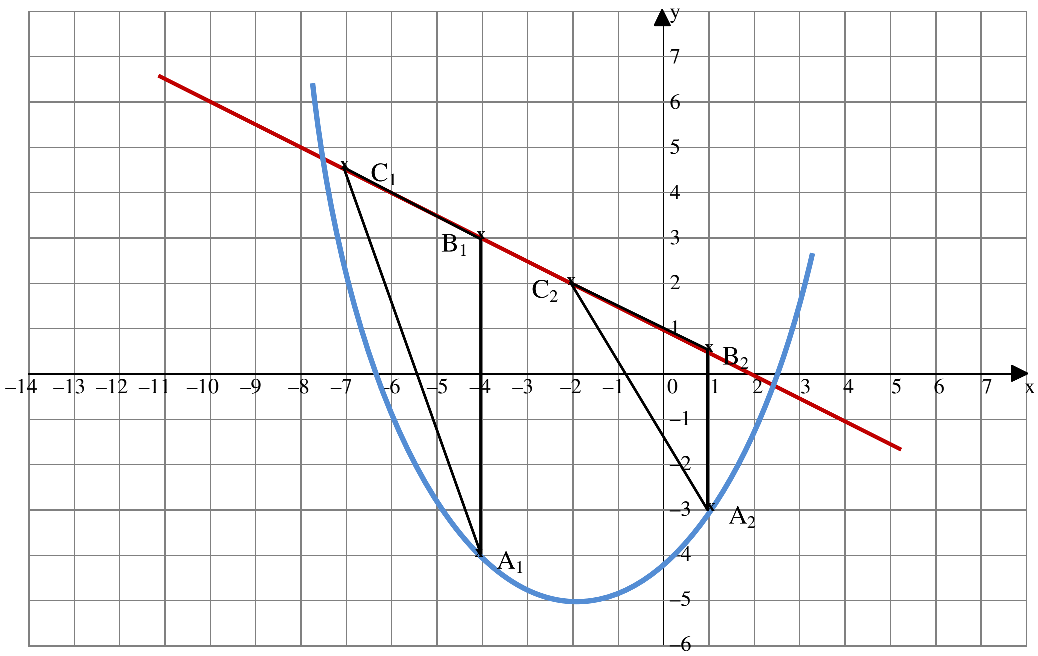
A 1.2 Zur Bestimmung der Masse wird das Volumen in Kubikzentimeter umgerechnet:
$1595{,}93\ mm^3 = 1{,}59593\ cm^3$

$1\ cm^3$ hat eine Masse von 7,85 g
$1{,}59593\ cm^3$ haben eine Masse von $1{,}59593\ cm^3 \cdot 7{,}85 = 12{,}53$ g

Die Edelstahlniete hat eine Masse von 12,53 g.

Aufgabe A 2

Zeichnung:



A 2.1 Zur Bestimmung der Parabelgleichung wird der gegebene Scheitelpunkt S (–2 | -5) in die Scheitelpunktform eingesetzt:
$y = 0{,}25\,(x + 2)^2 – 5$
$y = 0{,}25\,(x^2 + 4x + 4) – 5$
$y = 0{,}25x^2 + x + 1 – 5$
$y = 0{,}25x^2 + x – 4$

A 2.2 Zur Berechnung der x-Werte der Schnittpunkte werden die Gleichungen von Parabel und Geraden gleichgesetzt. Einsetzen der Ergebnisse in die Geradengleichung ergibt die y-Werte.

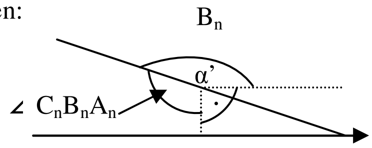
$$
\begin{aligned}
0{,}25x^2 + x – 4 &= –0{,}5x + 1 \\
0{,}25x^2 + 1{,}5x – 5 &= 0 \qquad | \cdot 4 \\
x^2 + 6x – 20 &= 0 \\
x_{1,2} &= –3 \pm \sqrt{9 + 20} \\
x_{1,2} &= –3 \pm 5{,}39 \\
x_1 &= 2{,}39 \quad \Rightarrow y_1 = –0{,}20 \\
x_2 &= –8{,}39 \quad \Rightarrow y_2 = 5{,}20
\end{aligned}
$$

Die Schnittpunkte sind also P(–8,39|5,2) und Q(2,39|–0,2).

A 2.3 Die Eckpunkte der Dreiecke sind $A_n(x|0{,}25x^2 + x - 4)$; $B_n(x|-0{,}5x + 1)$ und $C_n(x - 3| - 0{,}5(x - 3) + 1)$. Damit ergeben sich die folgenden Ecken:
Dreieck $A_1B_1C_1$ mit $x_1 = -4$:
$A_1(-4|-4)$; $B_1(-4|3)$; $C_1(-7|4{,}5)$
Dreieck $A_2B_2C_2$ mit $x_2 = 2$:
$A_2(1|-2{,}75)$; $B_2(1|0{,}5)$; $C_2(-2|2)$

A 2.4 Die C_n liegen auf der Geraden g, ihre y-Koordinaten lauten also
$y_{Cn} = -0{,}5(x - 3) + 1 = -0{,}5x + 1{,}5 + 1 = -0{,}5x + 2{,}5$
Ihre Abszisse (x-Wert) ist um 3 kleiner als die Abszisse der Punkte A_n und B_n, also $x_{Cn} = x - 3$
Damit folgt $C_n(x - 3|-0{,}5x + 2{,}5)$.

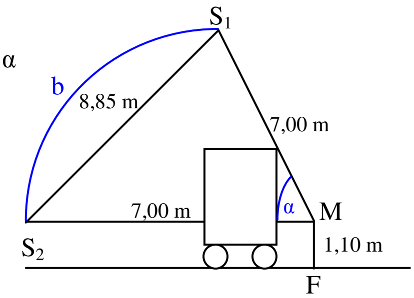
A 2.5 Die Punkte B_n und C_n liegen auf der Geraden g.
Damit kann man α als Steigungswinkel berechnen:
$\tan\alpha = m = -0{,}5$
$\alpha = -26{,}57°$
$\Rightarrow \alpha' = 180° - 26{,}57° = 153{,}43°$
Daraus folgt für den Winkel $\angle C_nB_nA_n$:
$\angle C_nB_nA_n = 360° - 153{,}43° - 90° = 116{,}57°$



Aufgabe A 3

A 3.1 Berechnung von α mit dem Cosinussatz:

$$\overline{S_1S_2} = \overline{MS_1}^2 + \overline{MS_2}^2 - 2 \cdot \overline{MS_1} \cdot \overline{MS_2} \cdot \cos\alpha$$
$$8{,}85^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos\alpha$$
$$78{,}32 = 98 - 98 \cdot \cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{98 - 78{,}32}{98}$$
$$\alpha = 78{,}43°$$



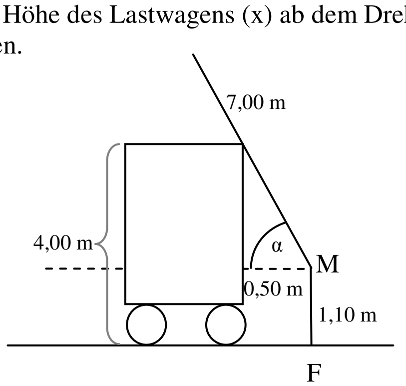
Damit ergibt sich für die Bogenlänge b:

$$b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°}$$
$$b = 2 \cdot \pi \cdot 7 \cdot \frac{78{,}42°}{360°}$$
$$b = 9{,}58 \text{ m}$$

A 3.2 Damit die Schranke nicht beschädigt wird, sollte die Höhe des Lastwagens (x) ab dem Drehpunkt weniger als 4,00 m – 1,10 m = 2,90 m betragen.
x wird mit dem Tangens berechnet:

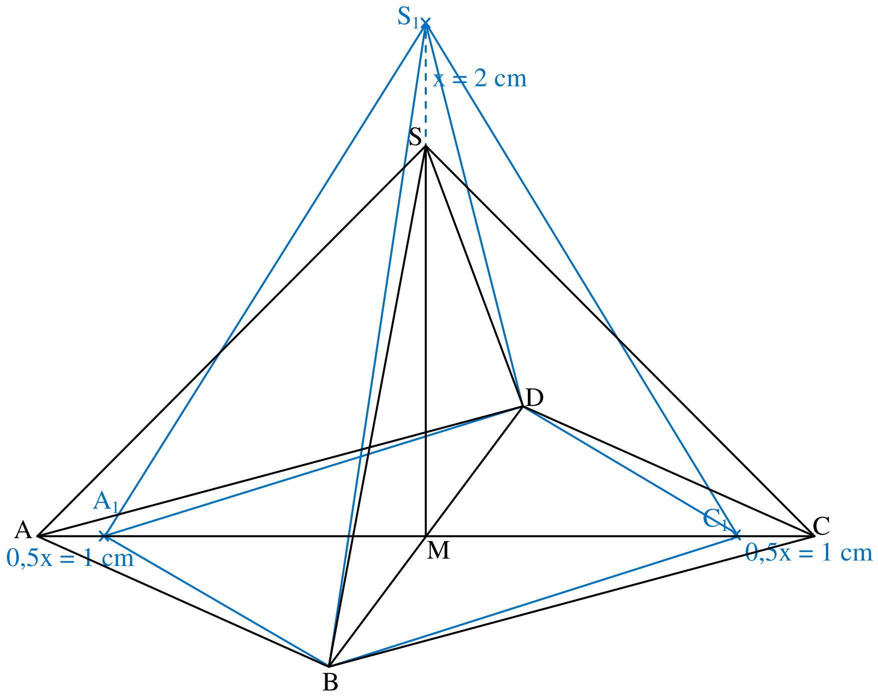
$$\tan\alpha = \frac{x}{0{,}5}$$
$$x = 0{,}5 \cdot \tan 78{,}42°$$
$$x = 2{,}44 \text{ m}$$

Die Schranke wird nicht beschädigt.



Aufgabe B 1

Zeichnung:

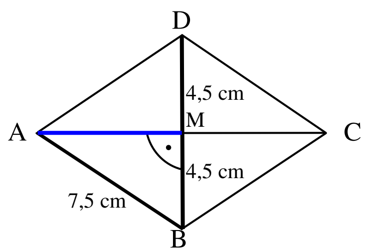


B 1.1 $\overline{AC}$ wird in der Raute berechnet, die die Grundfläche bildet.

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 - \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2$$

$$\overline{AM}^2 = (7{,}5\text{ cm})^2 - (4{,}5\text{ cm})^2 = 6{,}0\text{ cm}$$

$$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AM} = 12{,}00\text{ cm}$$



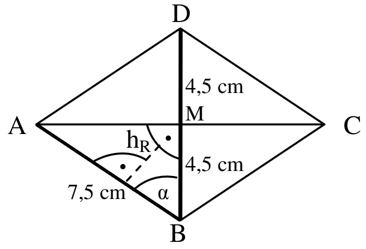
Konstruktion des Schrägbilds:

1. $\overline{AC}$ waagrecht zeichnen, M festlegen,
2. in M eine Gerade im 45°-Winkel zeichnen,
3. darauf $\overline{BM}$ nach oben und unten abtragen, aus $\overline{BM}$ = 4,5 cm wird mit Verkürzung 2,25 cm,
4. Höhe h = 6 cm in M errichten,
5. Pyramidenseitenkanten verbinden.

B 1.2 Berechnung des Winkels α in der Grundseite ($\overline{MB} = 0{,}5 \cdot \overline{BD} = 4{,}5$ cm):

$$\cos\alpha = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{4{,}5}{7{,}5}$$

$\alpha = 53{,}13°$



Berechnung der Höhe h_R eines der Dreiecke in der Grundseite:

$$\sin\alpha = \frac{h_R}{\overline{MB}}$$

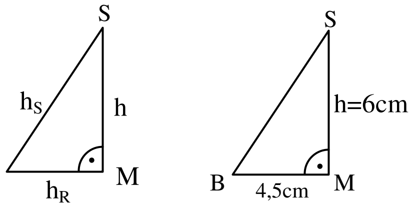
$h_R = \overline{MB} \cdot \sin\alpha$
$h_R = 4{,}5\text{ cm} \cdot \sin 53{,}13°$
$h_R = 3{,}6$ cm

Damit kann jetzt die Seitenhöhe h_S der Pyramide bestimmt werden ($h = \overline{MS} = 6$ cm):

$h_S^2 = h_R^2 + h^2$
$h_S^2 = (3{,}6\text{ cm})^2 + (6\text{cm})^2$
$h_S = 7{,}0$ cm

Für die Seitenkante $\overline{SB}$ gilt:

$\overline{SB}^2 = \overline{MB}^2 + h^2$
$\overline{SB}^2 = (4{,}5\text{ cm})^2 + (6\text{ cm})^2$
$\overline{SB} = 7{,}5$ cm



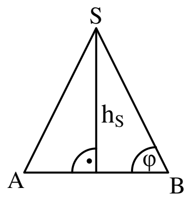
Mit diesen Werten kann man nun das Maß φ des Winkels SBA berechnen:

$$\sin\varphi = \frac{h_S}{\overline{SB}} = \frac{7{,}0}{7{,}5}$$

$\varphi = 68{,}96°$

Für den Flächeninhalt A_{ABS} folgt:

$A = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h_S = 0{,}5 \cdot 7{,}5\text{ cm} \cdot 7\text{ cm}$
$A = 26{,}25\text{ cm}^2$



B 1.3 Für x = 2 gilt:

$\overline{AC} = 12\text{ cm} - 2 \cdot (0{,}5 \cdot x) = 10$ cm
$\overline{AM} = 0{,}5\ \overline{AC} = 5$ cm
$h' = h + x = 6 + 2 = 8$ cm
$\overline{BD} = 9$ cm (unverändert)

B 1.4 Für das Volumen einer Pyramide gilt:

$$V = \frac{1}{3}\text{ Grundfläche } \cdot \text{Höhe, hier also}$$

$$V_{AnBCnDSn} = \frac{1}{3} \cdot A_{AnBCnD} \cdot h_n$$

$$A_{AnBCnD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{A_nC_n}$$

$$A_{AnBCnD} = \frac{1}{2} \cdot 9 \text{ cm} \cdot (12 - x) \text{ m}$$

$$h_n = (6 + x) \text{ cm}$$

$$V_{AnBCnDSn} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \text{ cm} \cdot (12 - x) \text{ cm} \cdot (6 + x) \text{ cm}$$

$$V_{AnBCnDSn} = 1{,}5 \cdot (12 - x) \cdot (6 + x) \text{ cm}^3$$

$$V_{AnBCnDSn} = (-1{,}5 x^2 + 9x + 108) \text{ cm}^3$$

Diese Gleichung hat die Form einer Parabelgleichung, deren maximaler Wert liegt im Scheitel. Den Scheitelpunkt bestimmt man, indem man –1,5 ausklammert und die Gleichung dann in die Scheitelpunktform bringt.

$-1{,}5 x^2 + 9x + 108 = -1{,}5(x^2 - 6x - 72) = -1{,}5((x - 3)^2 - 81)$
Der Scheitelpunkt liegt also bei x = 3. Damit ergibt sich das Maximalvolumen:
$V_{max}(x = 3) = (-1{,}5 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 108) \text{ cm}^3 = 121{,}5 \text{ cm}^3$

B 1.5 Für die Pyramide ABCDS gilt x = 0, also das Volumen
$V_{ABCDS} = (-1{,}5 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 + 108) \text{ cm}^3 = 108 \text{ cm}^3$
Die Pyramide $A_3BC_3DS_3$ hat ein Volumen von $0{,}7 \cdot 108 \text{ cm}^3 = 75{,}6 \text{ cm}^3$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
75{,}6 &= -1{,}5x^2 + 9x + 108 && \mid -75{,}6 \\
0 &= -1{,}5x^2 + 9x + 32{,}4 && \mid : (-1{,}5) \\
0 &= x^2 - 6x - 21{,}6 \\
x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{9 + 21{,}6} \\
x_{1,2} &= 3 \pm 5{,}53 \\
x_1 &= 8{,}53 \; [x_2 = -2{,}35]
\end{aligned}$$

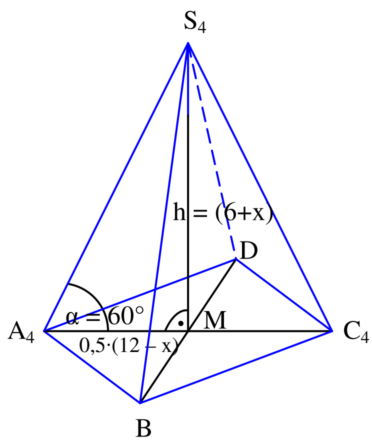
B 1.6 Berechnung des x-Wertes für Winkel $C_4A_4S_4 = 60°$:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{S_4M}}{\overline{A_4M}} = \frac{6+x}{0{,}5 \cdot (12-x)}$$

Mit $\tan 60° = \sqrt{3}$ folgt

$$\sqrt{3} = \frac{6+x}{0{,}5 \cdot (12-x)}$$

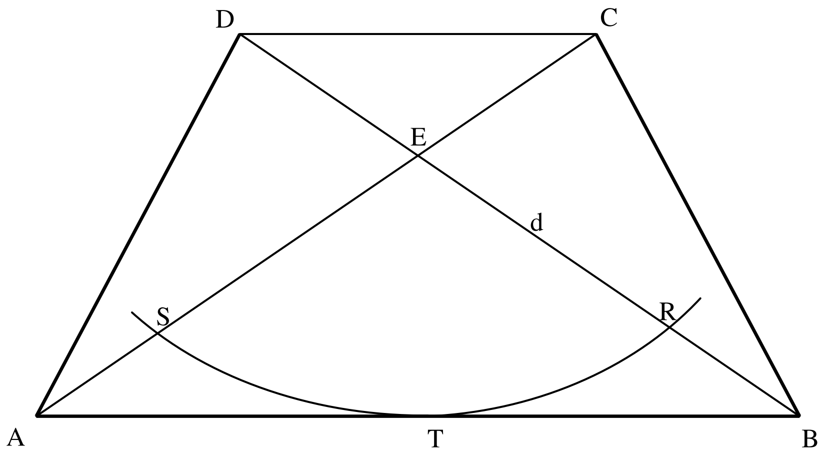
$$\begin{aligned}
0{,}5(12 - x) \cdot \sqrt{3} &= 6 + x \\
6\sqrt{3} - 0{,}5 \cdot \sqrt{3}\, x &= 6 + x \\
6\sqrt{3} - 6 &= x + 0{,}5\sqrt{3}\, x \\
4{,}39 &= 1{,}87\, x \\
x &= 2{,}35 \text{ cm}
\end{aligned}$$



Für x = 2,35 cm ist der Winkel CAS = 60°.

Aufgabe B 2

Zeichnung



B 2.1 Konstruktion des Trapezes:

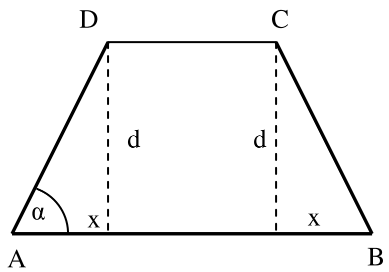
Es gilt $\overline{AB} = 10$ cm; $\overline{AD} = 6{,}5$ cm; d = 6 cm

Beginne mit $\overline{AB} = 10$ cm, zeichne eine Parallele dazu im Abstand 6 cm.
Schlage einen Kreis um A mit Radius 6,5 cm, der Schnittpunkt mit der Parallelen ist D.
Entsprechend ergibt der Kreis um B mit Radius 6,5 cm den Punkt C.
Verbinde die Eckpunkte und zeichne die Diagonalen.

B 2.2 Das Maß α des Winkels BAD berechnet man in dem rechtwinkligen Dreieck, das man in das Trapez einzeichnen kann:

$\sin\alpha = \dfrac{d}{\overline{AD}} = \dfrac{6}{6{,}5}$

$\alpha = 67{,}38°$



Für die Kathete x dieses Dreiecks gilt:

$x^2 = \overline{AD}^2 - d^2$

$x^2 = 6{,}5^2 - 6^2$

$x = 2{,}5$ cm

Damit lässt sich $\overline{CD}$ berechnen:

$\overline{CD} = \overline{AB} - 2 \cdot x$

$\overline{CD} = 10\text{ cm} - 2 \cdot 2{,}5\text{ cm}$

$\overline{CD} = 5$ cm

Für $\overline{AC}$ gilt schließlich:

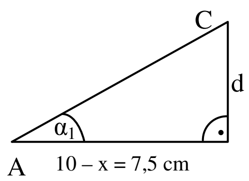
$\overline{AC}^2 = (10\text{ cm} - x)^2 + d^2$

$\overline{AC}^2 = (7{,}5\text{ cm})^2 + (6\text{ cm})^2$

$\overline{AC} = 9{,}60$ cm

B 2.3 Der Kreisbogen ist in die obige Zeichnung eingetragen.

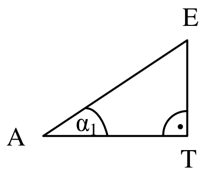
B 2.4 Berechnung des Winkelmaßes α_1 in dem Dreieck, das aus $\overline{AC}$ und der Höhe d des Trapezes gebildet wird:



$$\tan \alpha_1 = \frac{d}{10 - x} = \frac{6\,\text{cm}}{7{,}5\,\text{cm}}$$

$\alpha_1 = 38{,}66$

Mit α_1 lässt sich dann $\overline{ET}$, also der Radius des Kreissektors berechnen:



$$\tan \alpha_1 = \frac{\overline{ET}}{\overline{AT}}$$

$\overline{ET} = \overline{AT} \cdot \tan 38{,}66°$

$\overline{ET} = 4{,}0\text{ cm}$

Im Dreieck ABE wird das Winkelmaß ε berechnet:

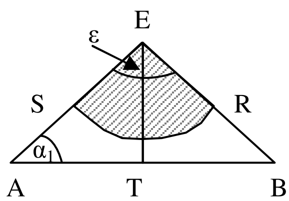
$\varepsilon = 180° - 2 \cdot \alpha_1$

$\varepsilon = 180° - 2 \cdot 38{,}66°$

$\varepsilon = 102{,}68°$

Der Winkel AET ist halb so groß wie ε:

Maß(AET) = $0{,}5 \cdot \varepsilon = 51{,}34°$.



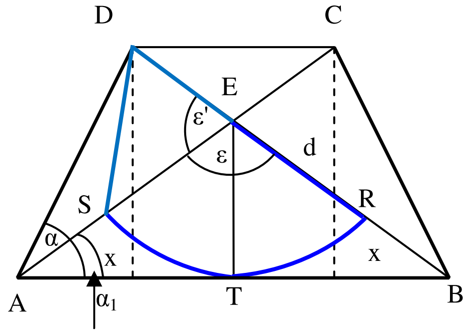
Mit dem Winkel $\varepsilon = 102{,}68°$ und dem Radius $\overline{ET} = 4{,}0\text{ cm}$ kann nun der Flächeninhalt A des Kreissektors berechnet werden

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\varepsilon}{360°}$$

$$A = \pi \cdot (4\text{ cm})^2 \cdot \frac{102{,}68°}{360°}$$

$A = 14{,}34\text{ cm}^2$

B 2.5 Der Umfang der Figur DSTRE ist blau gezeichnet.



Berechnung von $\overline{BE}$ (mit $\overline{BT} = 0{,}5 \cdot \overline{AB} = 5$ cm):

$\overline{BE}^2 = \overline{BT}^2 + \overline{ET}^2$

$\overline{BE}^2 = (5\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2$

$\overline{BE} = 6{,}4$ cm

Für $\overline{DE}$ gilt dann:

$\overline{DE} = \overline{BD} - \overline{BE}$

$\overline{DE} = 9{,}6\text{ cm} - 6{,}4\text{ cm} = 3{,}2$ cm

Für den Umfang des Kreissektors gilt:

$$\overset{\frown}{SR} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\varepsilon}{360°}$$

$$\overset{\frown}{SR} = 2 \cdot \pi \cdot 4\text{ cm} \cdot \frac{102{,}68°}{360°} = 7{,}17\text{ cm}$$

Mit dem Cosinussatz berechnet man $\overline{DS}$:

$\overline{DS}^2 = \overline{ES}^2 + \overline{DE}^2 - 2 \cdot \overline{ES} \cdot \overline{DE} \cdot \cos \varepsilon'$

$\overline{DS}^2 = (4\text{ cm})^2 + (3{,}2\text{ cm})^2 - 2 \cdot 4\text{ cm} \cdot 3{,}2\text{ cm} \cdot \cos(180° - \varepsilon)$

$\overline{DS} = 4{,}54$ cm

Für den Umfang u gilt somit:

$u = \overline{RD} + \overline{DS} + \overset{\frown}{SR}$

$u = (4\text{ cm} + 3{,}2\text{ cm}) + 4{,}54\text{ cm} + 7{,}17\text{ cm} = 18{,}91$ cm

B 2.6 Flächeninhalt des Trapezes:

$A = 0{,}5 \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot d$

$A = 0{,}5 \cdot (10\text{ cm} + 5\text{ cm}) \cdot 6$ cm

$A = 45\text{ cm}^2$

Die Hälfte hiervon ist $22{,}5\text{ cm}^2$.

Die Figur aus Aufgabe B 2.5 besteht aus dem Kreisausschnitt und dem Dreieck DSE.
Der Flächeninhalt des Kreisausschnitts wurde bereits in B 2.4 berechnet:

$A_{\text{Kreisausschnitt}} = 14{,}34\text{ cm}^2$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt:

$A_\Delta = 0{,}5 \cdot \overline{SE} \cdot \overline{DE} \cdot \sin \varepsilon'$

$A_\Delta = 0{,}5 \cdot 4\text{ cm} \cdot 3{,}2\text{ cm} \cdot \sin 77{,}32°$

$A_\Delta = 6{,}24\text{ cm}^2$

Insgesamt beträgt der Flächeninhalt der blau umrandeten Figur also:

$A_{ges} = A_\Delta + A_{\text{Kreisausschnitt}}$

$A_{ges} = 6{,}24\text{ cm}^2 + 14{,}34\text{cm}^2 = 20{,}58\text{ cm}^2$

Der Flächeninhalt der Figur aus 2.5 ist kleiner als die Hälfte des Flächeninhalts des Trapezes.