Lösung

Diese Lösung wurde erstellt von Cornelia Sanzenbacher. Sie ist keine offizielle Lösung des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen.

Prüfungsteil 1: Aufgabe 1

a) Jungen: x; Mädchen 2x; insgesamt 3x

Anteil der Jungen: 1x von 3x $\Rightarrow \frac{1}{3}$

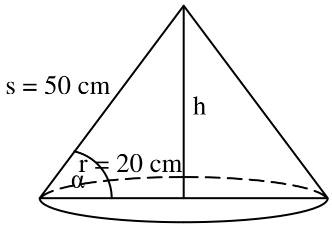
Anteil der Mädchen: 2x von 3x $\Rightarrow \frac{2}{3}$

b) (1) **Berechnung der Höhe h**

$h^2 = s^2 - r^2$

$h^2 = (50\text{ cm})^2 - (20\text{ cm})^2$

$h = 45{,}8\text{ cm}$



Berechnung des Volumens V

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (20\text{cm})^2 \cdot 45{,}8\text{cm}$

$V = 19184{,}659\text{ cm}^3$

$V = 19{,}2\text{ l}$

(2) **Berechnung von α**

$\tan\alpha = \frac{h}{r} = \frac{45{,}8}{20} = 2{,}29 \Rightarrow \alpha = 66{,}4$

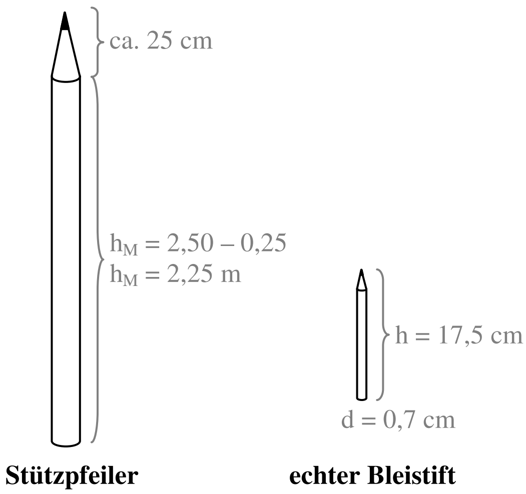
c) (1) **Berechnung des Durchmessers d eines Stützpfeilers**

Die 17,5 cm langen echten Bleistifte werden in der Vergrößerung durch 2,5 m lange Säulen dargestellt.
Es gilt also der „Maßstab" 250 : 17,5. Man kann mit dem Dreisatz rechnen:

d : 250 = 0,7 : 17,5

Daraus folgt:

d = 10 cm $\Rightarrow$ r = 5 cm



(2) Von den 2,5 m hohen Stützpfeilern sind etwa 2,25 m dunkel gefärbt (der Rest ist die Spitze).
Mantel des Zylinders mit einer Höhe von 2,25 m:

$M_{Zyl} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$M_{Zyl} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 225$

$M_{Zyl} = 7068{,}58\text{ cm}^2 = 0{,}71\text{ m}^2$

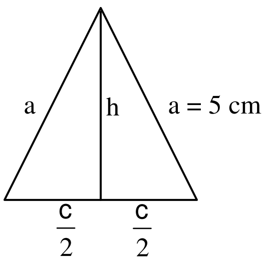
Zu streichen sind die Mäntel der beiden Stützpfeiler, also eine Fläche von
$F = 2 \cdot M_{Zyl} = 2 \cdot 0{,}71 = 1{,}42\text{ m}^2$.
Die vorhandene Farbe reicht aus.

d) Die Lösungen des Gleichungssystems
$y = 2x + 3$ und
$y = 2x + 0{,}4$
entsprechen grafisch der Schnittstelle zwischen den beiden Geraden, als deren Funktionsgleichungen man die beiden Gleichungen ansehen kann. Beide Geraden haben die gleiche Steigung 2. Zwei Geraden mit der gleichen Steigung haben keine Schnittpunkte, sie sind parallel. Es gibt also keine Lösung des Gleichungssystems.
(Da die Achsenabschnitte der Geraden nicht gleich sind, liegen die beiden Geraden auch nicht aufeinander, dann gäbe es unendlich viele Lösungen.)

Versucht man, das Gleichungssystem rechnerisch zu lösen, so erhält man eine falsche Aussage:
Gleichsetzen der beiden Gleichungen: $2x + 3 = 2x + 0{,}4$
Auflösen nach der Variablen x führt zu der falschen Aussage: $3 = 0{,}4$
Es gibt keine Lösungen. $\mathbb{L} = \{\ \}$

e) Es gilt $(a + c) \cdot c = a \cdot a$.
Auflösen dieser Gleichung nach c:

$$(5 + c) \cdot c = 5 \cdot 5$$
$$5c + c^2 = 25 \quad | -25$$
$$c^2 + 5c - 25 = 0$$
$$c_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 25}$$
$$c_{1,2} = -2{,}5 \pm 5{,}59$$
$$c_1 = 3{,}1 \text{ cm}$$
$$(c_2 = -8{,}09)$$



Prüfungsteil 2: Aufgabe 2

a)

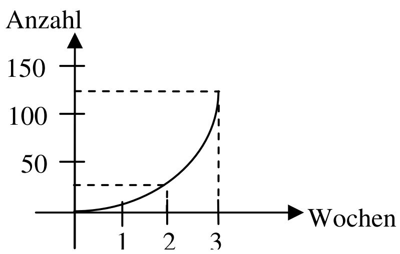
1. Woche	5 Blattläuse	$1 \cdot 5 = 5$
2. Woche	25 Blattläuse	$5 \cdot 5 = 25$
3. Woche	125 Blattläuse	$25 \cdot 5 = 125$

b) Die Anzahl der Blattläuse entwickelt sich gemäß der Funktion $f(x) = 5^x$.

(1) Die Variable x gibt die Anzahl der Wochen an, die seit dem Start der Vermehrung vergangen sind.

(2) $f(0) = 5^0 = 1$. Dies ist der Funktionswert, also die Anzahl der Blattläuse, zu Beginn der Vermehrung.

c)



d) Es muss die Gleichung $5^x = 80\,000$ Blattläuse gelöst werden.
Ermitteln von x durch Probieren:

5. Woche	$x = 5$	$5^5 = 3125$
6. Woche	$x = 6$	$5^6 = 15\,625$
7. Woche	$x = 7$	$5^7 = 78\,125$
8. Woche	$x = 8$	$5^8 = 390\,625$

Zu Beginn der 8. Woche ist die Anzahl der Blattläuse auf mehr als 80 000 angestiegen.

e) (1) Ein Jahr später, d. h. nach 52 Wochen, ist die Anzahl der Blattläuse: $1 \cdot 5^{52} = 2{,}22 \cdot 10^{36}$.
Die Rechnung von Frau Schmidt stimmt.

(2) Die Aussage ist nicht realistisch, da die exponentielle Vermehrung nicht unbegrenzt gilt. Im Winter vermehren sich Blattläuse kaum oder gar nicht, wenn nicht mehr ausreichend Ressourcen vorhanden sind, geht die Vermehrung zurück, Blattläuse sterben auch.

f) Die Funktion $g(x) = 100 \cdot 5^x$ beschreibt die Situation richtig. Das kann man erkennen, wenn man einige x-Werte betrachtet:

Beginn	$x = 0$	$g(0) = 100 \cdot 5^0 = 100$	Zu Beginn werden 100 Blattläuse gezählt.
1. Woche	$x = 1$	$g(1) = 100 \cdot 5^1 = 500$	Die Anzahl der Blattläuse hat sich verfünffacht.
2. Woche	$x = 2$	$g(2) = 100 \cdot 5^2 = 2500$	$2500 = 500 \cdot 5$: Die 500 Blattläuse haben sich nach einer Woche wieder verfünffacht.

Prüfungsteil 2: Aufgabe 3

a)

	1.Runde	2.Runde	3.Runde	4.Runde	5.Runde	6.Runde	7.Runde	8.Runde
Anne	Papier	Papier	Stein	Schere	Stein	Schere	Stein	Papier
Paul	Stein	Schere	Stein	Papier	Schere	Stein	Papier	Schere
Gewinner	Anne	Paul	unentsch.	Anne	Anne	Paul	Paul	Paul

(1) Anne hat von den ersten 5 Runden 3 gewonnen.

(2) Paul muss die letzten drei Runden gewinnen, damit er Gesamtsieger wird. Die Tabelle gibt eine Möglichkeit an, bei der dies erreicht wird.

b)

Anne \ Paul	Stein	Schere	Papier
Stein	unentschieden	Anne gewinnt	Paul gewinnt
Schere	Paul gewinnt	unentschieden	Anne gewinnt
Papier	Anne gewinnt	Paul gewinnt	unentschieden

(1) Die Spiele, deren Ergebnisse auf der Diagonalen stehen, gehen unentschieden aus.

(2) P(Anne Stein;Paul Papier) $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

(3) P(Paul gewinnt) $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(4) P(Paul gewinnt zweimal) $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

c) (1)

Paul / Anne	**Stein**	**Schere**	**Papier**	**Brunnen**
Stein	unentschieden	**Anne gewinnt**	Paul gewinnt	Paul gewinnt
Schere	Paul gewinnt	unentschieden	Anne gewinnt	Paul gewinnt
Papier	Anne gewinnt	Paul gewinnt	unentschieden	Anne gewinnt
Brunnen	Anne gewinnt	Anne gewinnt	Paul gewinnt	unentschieden

(2) Die Wahrscheinlichkeit für unentschieden war ohne Brunnen P(unent. o. B.) = $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, jetzt beträgt sie P(unent. m. B.) = $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. Sie ist also kleiner, nicht größer geworden.

(3) Mit den Zeichen „Papier“ und „Brunnen“ gewinnt Anne in 2 von 4 Fällen, sonst nur in 1 von 4.

Prüfungsteil 3: Aufgabe 4

a) (1) Zeichne zunächst ein Quadrat mit der Kantenlänge 2 cm, dann ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 cm.

(2) 1. Schritt: 1 Quadrat
2. Schritt: 1 + 4 Quadrate
3. Schritt: 1 + 4 + 4 Quadrate
4. Schritt: 1 + 4 + 4 + 4 Quadrate = 13 Quadrate

Die Figur besteht nach dem 4. Schritt aus 13 Quadraten.

(3) Im ersten Schritt besteht die Figur aus einem Quadrat, dann kommen in jedem Schritt 4 weitere Quadrate hinzu. Zu der „1“, die das Quadrat des ersten Schritts angibt, werden deshalb erst ab dem 2. Schritt je 4 Quadrate addiert, bei n Schritten also (n – 1)-mal.
Damit gilt: $1 + 4 \cdot (n - 1)$.

(4) Das erste Quadrat hat den Flächeninhalt a^2. Die Seitenlänge der 4 Quadrate, die im 2. Schritt hinzukommen, beträgt $\frac{a}{2}$, die der 4 Quadrate aus dem 3. Schritt $\frac{a}{4}$. Damit gilt

$$A = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

$$A = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4} + 4 \cdot \frac{a^2}{16}$$

$$A = a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4}$$

Setzt man nun a = 4 cm ein, so ergibt sich:

$$A = 4^2 + 4^2 + \frac{4^2}{4}$$

$$A = 16 + 16 + 4 = 36 \text{ cm}^2$$

Die gesamte Figur hat nach dem dritten Schritt einen Flächeninhalt von 36 cm^2.

(5) Der Flächeninhalt der Figur nimmt vom 3. Schritt zum 4. Schritt um den folgenden Betrag zu:

$$A_{zu} = 4\left(\frac{a}{8}\right)^2 = 4 \cdot \frac{a^2}{64} = 4 \cdot \frac{4^2}{64} = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \text{ cm}^2.$$

Der prozentuale Anteil dieses Zuwachses am Flächeninhalt nach dem 3. Schritt beträgt:

$$p = \frac{PW \cdot 100}{G} = \frac{1 \cdot 100}{36} = 2{,}78\% \cdot$$

Der Flächeninhalt wächst um 2,78 %.

b) (1) Im 6. Schritt kommen vier Quadrate hinzu, die zusammen den Flächeninhalt 0,0039063 cm^2 haben.

(2) D5 gibt den Flächeninhalt der Figur nach dem 5. Schritt an. Nach dem 4. Schritt beträgt der Flächeninhalt 37,3125 cm^2 (D4), hierzu kommen vier Quadrate mit dem Flächeninhalt 0,015625 cm^2 (C5). In D5 steht also: 37,3125 cm^2 + 0,015625 cm^2 = 37,328125 cm^2.

(3) D10 = D9 + C10; C10 = 4*(B10)^2; B10 = 4/(2^(A10))

(4) Der Gesamtflächeninhalt nähert sich offensichtlich dem Wert $37\frac{1}{3}$, der nach 1 Millionen Schritten recht genau erreicht sein dürfte.