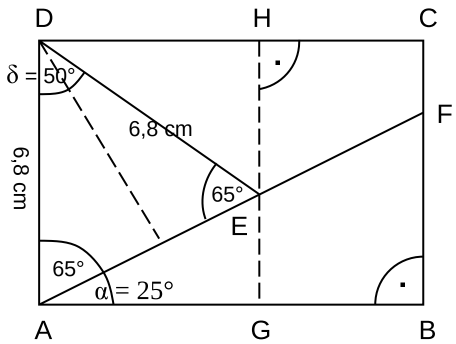
Wahlaufgaben

Diese Lösung wurde erstellt von Cornelia Sanzenbacher. Sie ist keine offizielle Lösung des Ministeriums für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg.

Aufgabe W1a)



1.Berechnung von $\overline{AB}$:

tan α = $\frac{\overline{BF}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{BF}}{\tan\alpha} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{4{,}2}{\tan 25°} \Rightarrow \overline{AB}$ = 9,0 cm

2. Berechnung von $\overline{AE}$:

$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\frac{\overline{AE}}{2}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{2} = \overline{AD}\cdot\sin\frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{2} = 6{,}8\cdot\sin 25° \Rightarrow \overline{AE}$ = 5,75 cm

3. Berechnung von $\overline{AG}$:

cos α = $\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} \Rightarrow \overline{AG} = \overline{AE}\cdot\cos\alpha \Rightarrow \overline{AG} = 5{,}75\cdot\cos 25° \Rightarrow \overline{AG}$ = 5,2 cm

4. Berechnung von $\overline{EG}$:

$\overline{EG}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AG}^2 \Rightarrow \overline{EG}^2 = 5{,}75^2 - 5{,}2^2 \Rightarrow \overline{EG}$ = 2,45 cm

5. Berechnung von $\overline{EH}$:

$\overline{EH} = \overline{AD} - \overline{EG} \Rightarrow \overline{EH} = 6{,}8 - 2{,}45 \Rightarrow \overline{EH}$ = 4,35 cm

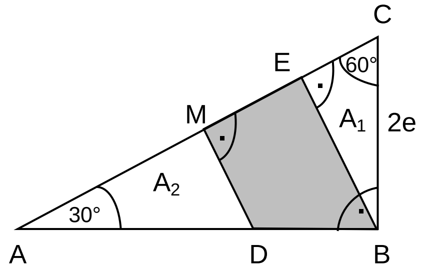
6. Berechnung von $\overline{CH}$:

$\overline{CH} = \overline{AB} - \overline{AG} \Rightarrow \overline{EH} = 9{,}0 - 5{,}2 \Rightarrow \overline{EH}$ = 3,8 cm

7. Berechnung von $\overline{CE}$:

$\overline{CE}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{CH}^2 \Rightarrow \overline{CE}^2 = 4{,}35^2 + 3{,}8^2 \Rightarrow \overline{CE}$ = 5,8 cm

Aufgabe W1b)



1. Berechnung von $\overline{AC}$:

$\sin 30° = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AC} = \dfrac{\overline{BC}}{\sin 30°} \Rightarrow \overline{AC} = \dfrac{2e}{\frac{1}{2}} = 4e \Rightarrow \overline{AM} = \overline{CM} = 2e$

2. Berechnung von $\overline{BE}$:

$\sin 60° = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BE} = \overline{BC} \cdot \sin 60° \Rightarrow \overline{BE} = 2e \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \overline{BE} = e\sqrt{3}$

3. Berechnung von $\overline{CE}$:

$\overline{CE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BE}^2 \Rightarrow \overline{CE}^2 = (2e)^2 - (e\sqrt{3})^2 \Rightarrow \overline{CE}^2 = 4e^2 - 3e^2 \Rightarrow \overline{CE} = e$

4. Berechnung von . $A_{BCE} = A_1$:

$A_1 = \frac{1}{2}\overline{CE} \cdot \overline{BE} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \cdot e \cdot e\sqrt{3} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}e^2\sqrt{3}$

5. Berechnung von $\overline{DM}$:

$\tan 30° = \dfrac{\overline{DM}}{\overline{AM}} \Rightarrow \overline{DM} = \overline{AM} \cdot \tan 30° \Rightarrow \overline{DM} = 2e \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \overline{DM} = \frac{2}{3}e\sqrt{3}$

6. Berechnung von $A_{ABC} = A$:

$A = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BE} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 4e \cdot e\sqrt{3} \Rightarrow A = 2e^2\sqrt{3}$

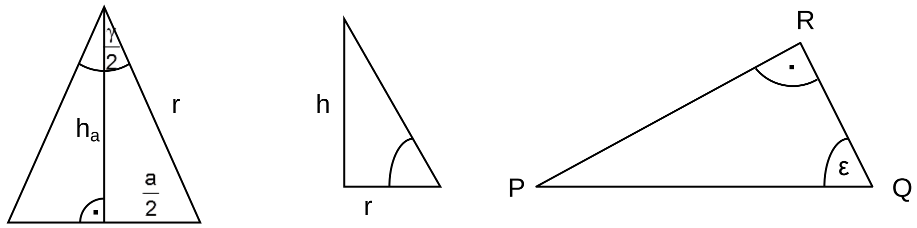
7. Berechnung von $A_{ADM} = A_2$:

$A_2 = \frac{1}{2}\overline{AM} \cdot \overline{DM} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \cdot 2e \cdot \frac{2}{3}e\sqrt{3} \Rightarrow A_2 = \frac{2}{3}e^2\sqrt{3}$

8. Berechnung des gesuchten Flächeninhalts A_{ges}:

$A_{ges} = A - A_1 - A_2 \Rightarrow A_{ges} = 2e^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}e^2\sqrt{3} - \frac{2}{3}e^2\sqrt{3} \Rightarrow A_{ges} = \frac{5}{6}e^2\sqrt{3}$

Aufgabe W2a)



Berechnungen an einem Teildreieck der Grundfläche

1. Berechnung des Winkels γ

$\gamma = 360° : 8 = 45°$

2. Berechnung von r:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow r = \frac{\frac{a}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow r = \frac{6}{\sin 22{,}5°} \Rightarrow r = 15{,}7\text{ cm}$$

3. Berechnung von $\overline{PQ}$:

$\overline{PQ} = 2 \cdot r \Rightarrow \overline{PQ} = 2 \cdot 15{,}7 \Rightarrow \overline{PQ} = 31{,}4\text{ cm}$

4. Berechnung der Dreieckshöhe h_a:

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_a} \Rightarrow h_a = \frac{\frac{a}{2}}{\tan\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow h_a = \frac{6}{\tan 22{,}5°} \Rightarrow h_a = 14{,}5\text{ cm}$$

5. Berechnung des Flächeninhalts G der Grundfläche:

$$G = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \Rightarrow G = 4 \cdot 12 \cdot 14{,}5 \Rightarrow G = 695{,}29\text{ cm}^2$$

6. Berechnung der Pyramidenhöhe h über das Volumen der Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \Rightarrow 8346 = \frac{1}{3} \cdot 695{,}29 \cdot h \Rightarrow h = 3 \cdot \frac{8346}{695{,}29} \Rightarrow h = 36{,}0\text{ cm}$$

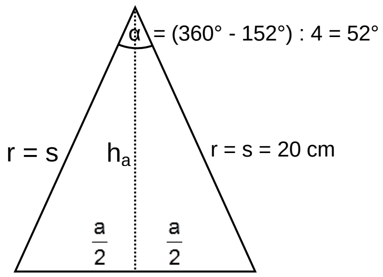
7. Berechnung des Winkels ε zwischen Boden und Seitenkante der Pyramide:

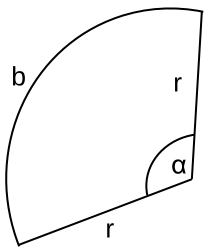
$$\tan\varepsilon = \frac{h}{r} \Rightarrow \tan\varepsilon = \frac{36}{15{,}7} \Rightarrow \varepsilon = 66{,}4°$$

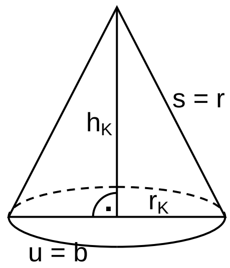
8. Berechnung von $\overline{PR}$:

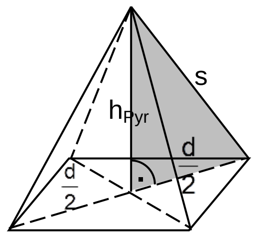
$$\sin\varepsilon = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} \Rightarrow \overline{PR} = \overline{PQ} \cdot \sin\varepsilon \Rightarrow \overline{PR} = 31{,}4 \cdot \sin 66{,}4° \Rightarrow \overline{PR} = 28{,}8\text{ cm}$$

Aufgabe W2b)









Von dem Mantel der quadratischen Pyramide sind die vier Teildreiecken mit s = r = 20 cm und dem Winkel α bekannt (α = (360° – 152°) : 4 = 52°).

1. Berechnung unteren Dreieckskante a:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow \frac{a}{2} = r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = 20 \cdot \sin 26° \Rightarrow \frac{a}{2} = 8{,}77 \text{ cm} \Rightarrow a = 17{,}5 \text{ cm}$$

Von dem Kegel ist die Mantelfläche bekannt. Sie ist ein Kreisausschnitt mit dem Radius r = 20 cm und dem Mittelpunktswinkel α = 152°.
Der Radius entspricht der Mantellinie des Kegels.
Der Kreisbogen b des Kreisausschnitts entspricht dem Kreisumfang u der Grundfläche des Kegels.

2. Berechnung von b = u:

$$b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow b = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot \frac{152°}{360°} \Rightarrow b = 53 \text{ cm} \Rightarrow u = 53 \text{ cm}$$

3. Berechnung des Radius r_K des Grundkreises des Kegels:

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r_K \Rightarrow 53 = 2 \cdot \pi \cdot r_K \Rightarrow r_K = \frac{53}{2\pi} \Rightarrow r_K = 8{,}4 \text{ cm}$$

4. Berechnung der Kegelhöhe h_K:

$$h_K^2 = s^2 - r_K^2 \Rightarrow h_K^2 = 20^2 - 8{,}4^2 \Rightarrow h_K = 18{,}15 \text{ cm}$$

5. Berechnung der Diagonalen der quadratischen Pyramidengrundfläche

$$d = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow d = 17{,}5 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow d = 24{,}8 \text{ cm}$$

6. Berechnung der Pyramidenhöhe h_{Pyr}:

$h_{Pyr}^2 = s^2 - (\frac{d}{2})^2 \Rightarrow h_{Pyr}^2 = 20^2 - 12{,}4^2 \Rightarrow h_{Pyr} = 15{,}69$ cm

7. Berechnung der Höhendifferenz Δh

$\Delta h = h_K - h_{Pyr} \Rightarrow \Delta h = 18{,}15 - 15{,}69 \Rightarrow \Delta h = 2{,}46$ cm

Aufgabe W 3a)

1. Berechnung der Parabelgleichung p_1:

Man geht von der allgemeinen Parabelgleichung $y = x^2 + px + q$ aus.

Aus der Wertetabelle liest man den Wert des y-Achsenschnittpunktes q = 3 ab.

$\Rightarrow y = x^2 + px + 3$

Mithilfe des zweiten angegebenen Punktes (–2|3) kann man eine Punktprobe machen:

$3 = (-2)^2 - 2p + 3 \qquad | -3$

$0 = 4 - 2p \qquad | +2p$

$2p = 4 \qquad | :2$

$p = 2$

$y = x^2 + 2x + 3$

2. Berechnung der fehlenden y-Werte in der Wertetabelle:

$y(-3) = (-3)^2 + 2(-3) + 3 = 6$; $y(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 2$;

$y(1) = 1^2 + 2\cdot1 + 3 = 6$, $y(2) = 2^2 + 2\cdot2 + 3 = 11$

(Du kannst auch mit dem Taschenrechnen Wertetabellen aufrufen und die Werte überneh-men. Informiere dich in den Betriebsanleitungen deines Taschenrechners.)

Wertetabelle

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	6	3	2	3	6	11

3. Berechnung des Scheitels von p_1 mit einer quadratischen Ergänzung

$y = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow y = (x+1)^2 + 3 - 1 \Rightarrow y = (x+1)^2 + 2$

Der Scheitel hat die Koordinaten S(–1|2).

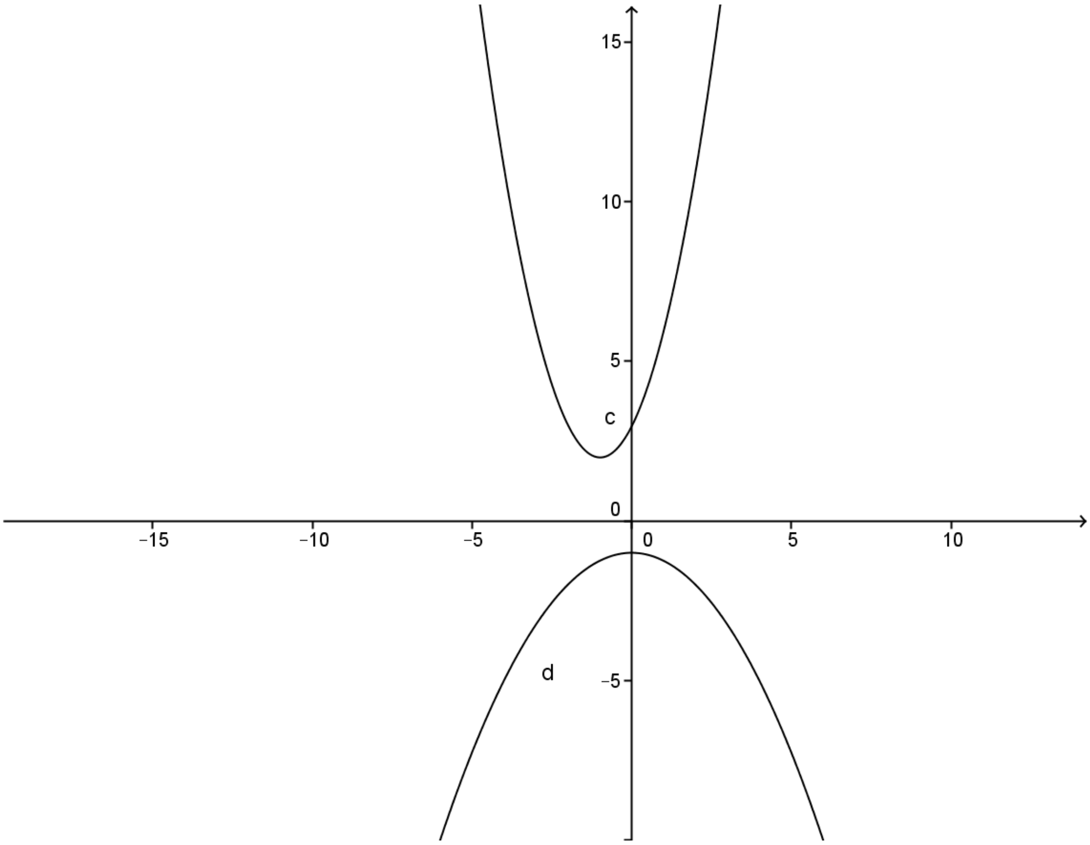
4. Wertetabelle der Parabel p_2:

p_2: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	– 5,5	– 3	– 1,5	– 1	– 1,5	– 5,5

Den Scheitel kann man aus der Wertetabelle oder der Funktionsgleichung ablesen: S(0|–1).

5. Zeichnung der beiden Parabeln



Parabel p_3:

p_3: $y = ax^2$ soll keine gemeinsamen Punkte mit p_1 und p_2 haben. Der Scheitelpunkt liegt im Ursprung, die Parabel muss weit genug sein, um die Parabeln p1 und p2 nicht zu schneiden. A muss also ausreichend klein sein.

Beispiel für $a = \frac{1}{2} \Longrightarrow y = \frac{1}{2}x^2$

Überprüfung der Schnittpunkte:

$p_3 \cap p_1$: $x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 \Longrightarrow 0 = x^2 + 4x + 6 \Longrightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-6} \Longrightarrow$ keine Schnittpunkte

$p_3 \cap p_2$: $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = -1 \Longrightarrow$ keine Lösung, keine Schnittpunkte

Aufgabe W 3b)

1. Bestimmung der Funktionsgleichung von p_1:

$y = x^2 + px - 1$

Punktprobe mit A(–1|2):

$A(-1|2) \in p_1$: $\quad 2 = (-1)^2 + p(-1) - 1$

$p = -2$

$p_1 : y = x^2 - 2x - 1$

2. Bestimmung der Funktionsgleichung von p_2: $y = -x^2 + c$

Punktprobe mit A(–1|2):

$A(-1|2) \in p_2$: $\quad 2 = -(-1)^2 + c$

$c = 3$

p_2: $y = -x^2 + 3$

3. Berechnung des zweiten Schnittpunkts B der beiden Parabeln durch Gleichsetzen

$x^2 - 2x - 1 = -x^2 + 3$

$2x^2 - 2x - 4 = 0 \qquad |:2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2}$

$x_{1,2} = 0{,}5 \pm 1{,}5$

$x_1 = 2 \qquad y(2) = -(2)^2 + 3 = -1 \qquad \Rightarrow B(2|-1)$

$x_2 = -1 \qquad \Rightarrow$ A(–1|2), der bereits bekannte Schnittpunkt.

Der zweite Schnittpunkt lautet B(2|–1).

4. Bestimmung der beiden Parabelscheitel S_1 und S_2:

p_1: $y = x^2 - 2x - 1$

$y = (x - 1)^2 - 1 - 1$

$y = (x - 1)^2 - 2$

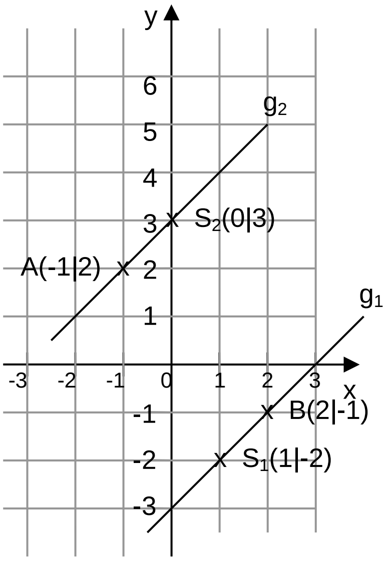
$\Rightarrow S_1(1|-2)$

p_2: $y = -x^2 + 3$

Der Scheitel ist gleichzeitig y-Achsenschnittpunkt.

$\Rightarrow S_2(0|3)$

5. Begründung der Behauptung von Luca: $g_1 \parallel g_2$



Wenn zwei Geraden parallel sind, so haben sie dieselbe Steigung.

Die Steigungen kann man mir der Zwei-Punkte-Form berechnen.

Berechnung der Steigung m_1:

$$m_1 = \frac{y_B - y_{S1}}{x_B - x_{S1}} = \frac{-1+2}{2-1} = 1$$

Berechnung der Steigung m_2:

$$m_2 = \frac{y_{S2} - y_A}{x_{S2} - X_a} = \frac{3-2}{0+1} = 1$$

Luca hat Recht, beide Geraden haben dieselbe Steigung und sind somit parallel.

Aufgabe W 4a)

P(zwei verschieden Buchstaben) = P_v, Gegenereignis zu „zwei gleiche Buchstaben"

$$P_v = 1 - P(A,A) - P(B,B) = 1 - \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} - \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7} = 1 - \frac{5}{14} - \frac{1}{28} = \frac{17}{28} = 60{,}7\ \%$$

P(gleiche Buchstaben) = P_g

$$P_g = P(A,A) + P(B,B) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7} = \frac{11}{28} = 39{,}3\ \%$$

P(C ist gezogen) = P_C

P_C = P(A,C) + P(B,C) + P(C,A) + P(C, B)

$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{5}{56} + \frac{2}{56} + \frac{5}{56} + \frac{2}{56} = \frac{1}{4} = 25{,}0\ \%$$

P(Restliche Möglichkeiten) = 1 – P(gleiche Buchstaben) – P(C ist gezogen) = P_R

$$P_R = 1 - \frac{11}{28} - \frac{1}{4} = \frac{5}{14} = 35{,}7\ \%$$

Gewinnplan 1

Ergebnis der Ziehung	Gewinn	Wahrscheinlichkeit
Zwei gleiche Buchstaben	3,00 €	$\frac{11}{28}$
Der Buchstabe C ist gezogen	5,00 €	$\frac{1}{4}$
Restliche Möglichkeiten	kein Gewinn	$\frac{5}{14}$
Einsatz	2,50 €	

Berechnung des Erwartungswertes E_1:

$$E_1 = \left(\frac{11}{28}\cdot 3\,€ + \frac{1}{4}\cdot 5\,€ + \frac{5}{14}\cdot 0\right) - 2{,}50\,€ = -0{,}07\,€$$

Gewinnplan 2

Ergebnis der Ziehung	Gewinn	Wahrscheinlichkeit
Zwei gleiche Buchstaben	5,00 €	$\frac{11}{28}$
Der Buchstabe C ist gezogen	3,00 €	$\frac{1}{4}$
Restliche Möglichkeiten	kein Gewinn	$\frac{5}{14}$
Einsatz	2,50 €	

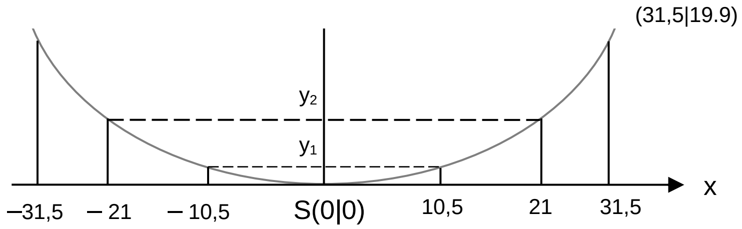
Berechnung des Erwartungswertes E_2:

$$E_1 = \left(\frac{11}{28}\cdot 5€ + \frac{1}{4}\cdot 3€ + \frac{5}{14}\cdot 0\right) - 2{,}50€ = -0{,}21€$$

Der Betreiber sollte Gewinnplan 1 wählen: Hier sind die Gewinnchancen für den Spieler niedriger, was dem Betreiber zu Gute kommt.

Aufgabe W 4b)

In die Zeichnung wird ein Koordinatensystem gelegt. Die einfachste Möglichkeit hierfür ist es, den Scheitel in den Ursprung zu legen. Damit ergeben sich die Koordinaten, die im folgenden Bild eingezeichnet sind.



1. Berechnung der Parabelgleichung

Der Scheitel der Parabel liegt im Ursprung $\Rightarrow y = ax^2$

P(31,5|19,9) $\in p \Rightarrow 19{,}9 = a\,(31{,}5)^2$

$a = 0{,}02$

$\Rightarrow p\colon y = 0{,}02x^2$

2. Berechnung der Längen der 4 Stahlseile:

Die Stahlseile befinden sich an den Stellen –21, –10,5, 10,5 und 21 auf der x-Achse.

Länge der inneren Stahlseile:

$y(10{,}5) = 0{,}02 \cdot (10{,}5)^2 = 2{,}21$ m

Länge der äußeren Stahlseile

$y(21) = 0{,}02 \cdot 21^2 = 8{,}82$ m

3. Berechnung der Gesamtlänge der 8 Stahlseile:

Länge = $4 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 = 4 \cdot 2{,}21 + = 4 \cdot 8{,}82 = 44{,}10$ m

Die Gesamtlänge der Stahlseile im mittleren Brückenabschnitt beträgt 44,10 Meter.