Prüfungsdauer: 150 Minuten

Diese Lösung wurde erstellt von Cornelia Sanzenbacher. Sie ist keine offizielle Lösung des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus.

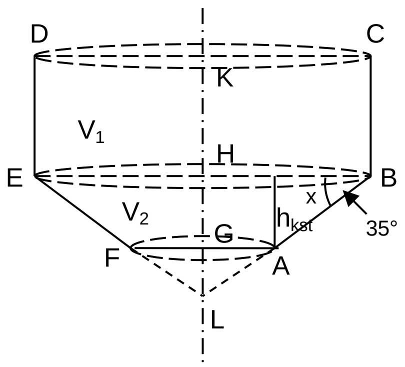
Aufgabe A1

A 1.0

Die Pflanzschale besteht aus einem Zylinder und einem Kegelstumpf.
Es gilt:

$\overline{BC} = 1{,}4\text{ dm} = h_{Zylinder}$; $\overline{CD} = 4{,}0\text{ dm} \Rightarrow \overline{BH} = 2{,}0\text{ dm} = r_1$; $\overline{GH} = 0{,}6\text{ dm} = h_{Kegelstumpf} = h_{kst}$

Winkel EBA: 35°



Berechnung des Zylindervolumens V_1

$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h_z$

$V_1 = \pi \cdot 2^2 \cdot 1{,}4$

$V_1 = 17{,}59\text{ dm}^3$

Berechnung der Länge x:

$$\tan 35° = \frac{h_{kst}}{x}$$

$$x = \frac{h_{kst}}{\tan 35°} = \frac{0{,}6}{\tan 35°}$$

$x = 0{,}86\text{ dm}$

Berechnung des Kegelradius $\overline{AG}$:

$\overline{AG} = \overline{BH} - x$

$\overline{AG} = 2 - 0{,}86$

$\overline{AG} = 1{,}14\text{ dm} = r_2$

Berechnung des Volumens des Kegelstumpfes V_2:

$r_1 = \overline{BH} = 2{,}0\text{ dm}$; $r_2 = 1{,}14\text{ dm}$; $h_{kst} = 0{,}6\text{ dm}$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot h_{kst} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 0{,}6 \cdot (2^2 + 2 \cdot 1{,}14 + 1{,}14^2)$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 0{,}6 \cdot 7{,}58$$

$V_2 = 4{,}762\text{ dm}^3$

Die gesamte Schale hat dann das Volumen

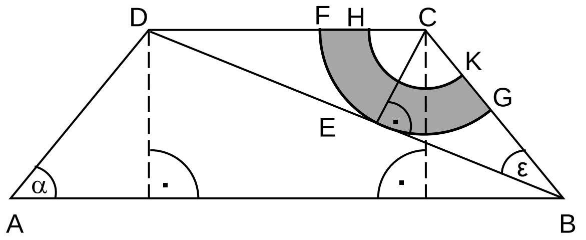
$V_{ges} = V_1 + V_2$

$V_{ges} = 17{,}59 + 4{,}762 = 22{,}353\text{ dm}^3$

20 l = 20 dm^3. Der Inhalt eines 20 l Sackes kann vollständig in den Pflanzkübel gefüllt werden, denn 22,4 dm^3 > 20 dm^3.

Aufgabe A2

A 2.1



$\overline{CD} = 8$ cm
$\overline{AD} = 6$ cm
$\overline{BC} = 7$ cm
Winkel DCB = 130°

Berechnung von $\overline{BD}$ mit dem Cosinussatz

$\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + BC^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \cos 130°$

$\overline{BD}^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos 130°$

$\overline{BD} = 13{,}60$ cm

Berechnung von ε mit dem Cosinussatz

$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD} \cdot \cos \varepsilon$

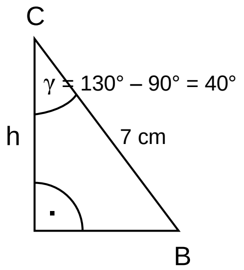
$8^2 = 7^2 + 13{,}6^2 - 2 \cdot 13{,}6 \cdot 7 \cdot \cos \varepsilon \qquad | - 7^2 - 13{,}6^2$

$-169{,}96 = -190{,}4 \cdot \cos \varepsilon \qquad | : (-190{,}4)$

$\cos \varepsilon = 0{,}892647$

$\varepsilon = 26{,}79°$

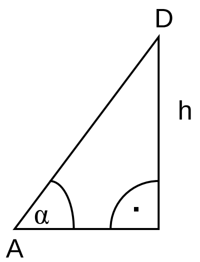
Berechnung der Trapezhöhe h



$\cos 40° = \dfrac{h}{\overline{BC}}$

$h = \overline{BC} \cdot \cos 40°$
$h = 5{,}36$ cm

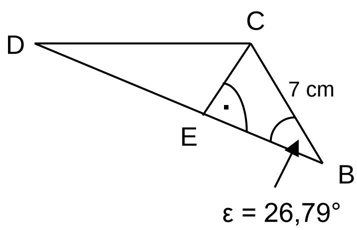
Berechnung von α



$\sin \alpha = \dfrac{h}{\overline{AD}} = \dfrac{5{,}36}{6} = 0{,}8933$

$\alpha = 63{,}29°$

A 2.2



Berechnung von CE

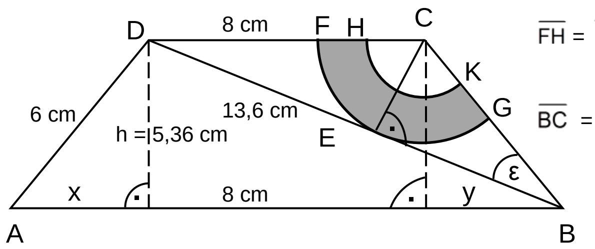
$\sin \varepsilon = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$

$\overline{CE} = \overline{BC} \cdot \sin \varepsilon$

$\overline{CE} = 7 \cdot \sin 26{,}79°$

$\overline{CE} = 3{,}16\text{ cm}$

A 2.3



$\overline{FH} = \overline{GK} = 1\text{ cm}$

$\overline{BC} = 7\text{ cm}$

Zuerst wird der Flächeninhalt des Trapezes berechnet.

Berechnung der Strecke y mit dem Satz des Pythagoras

$y^2 = 7^2 - 5{,}36^2 \Rightarrow y = 4{,}50\text{ cm}$

Berechnung der Strecke y mit dem Satz des Pythagoas

$x^2 = 6^2 - 5{,}36^2 \Rightarrow x = 2{,}70\text{ cm}$

Berechnung der Trapezseite $\overline{AB}$

$\overline{AB} = x + 8 + y \Rightarrow \overline{AB} = 2{,}7 + 8 + 4{,}5 \Rightarrow \overline{AB} = 15{,}20\text{ cm}$

Damit kann man den Flächeninhalt des Trapezes A_{Trapez} berechnen

$A_{Tr} = \frac{1}{2} \cdot (AB + CD) \cdot h$

$A_{Tr} = \frac{1}{2} \cdot (15{,}2 + 8) \cdot 5{,}36$

$A_{Tr} = 62{,}176\text{ cm}^2$

Vom Kreisausschnitt sind die Radien $r_1 = \overline{CE} = 3{,}16\text{ cm}$, $r_2 = r_1 - 1 = 2{,}16\text{ cm}$ und das Maß δ des Winkels DCB, $\delta = 130°$ bekannt. Damit folgt für den Flächeninhalt A_{KRA}:

$A_{KRA} = \pi \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \frac{\delta}{360°}$

$A_{KRA} = \pi \cdot (3{,}16^2 - 2{,}16^2) \frac{130°}{360°}$

$A_{KRA} = 6{,}04\text{ cm}^2$

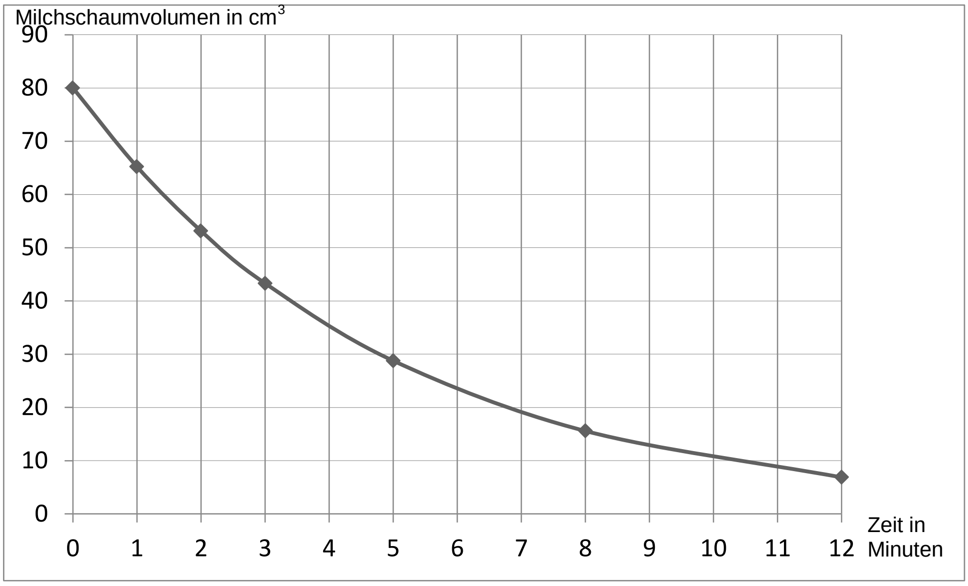
Berechnung des Prozentsatzes:

$$p = \frac{A_{KRA}}{A_{Tr}} \cdot 100 = \frac{6{,}04}{62{,}176} \cdot 100 = 9{,}71\ \%$$

Aufgabe A3

A 3.1 $y = 80 \cdot 0{,}815^x$

x	0	1	2	3	5	8	12
y	80	65,2	53,138	43,307	28,766	15,572	6,870



A 3.2 Nach 4 Minuten sind noch 35 cm^3 Milchschaum übrig.

A 3.3 $y = 80 \cdot 0{,}815^{10} = 10{,}34$

Der Rest des Milchschaums beträgt 10,34 cm^3.

Es sind also $80 - 10{,}34 = 69{,}66$ cm^3 Milchschaum zerfallen.

Aufgabe B1

B 1.0 Gegeben: p_1: P(–2|–2) und Q(8|3) ; p_1 : $y = ax^2 + bx + 3$

$p_2 : y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$

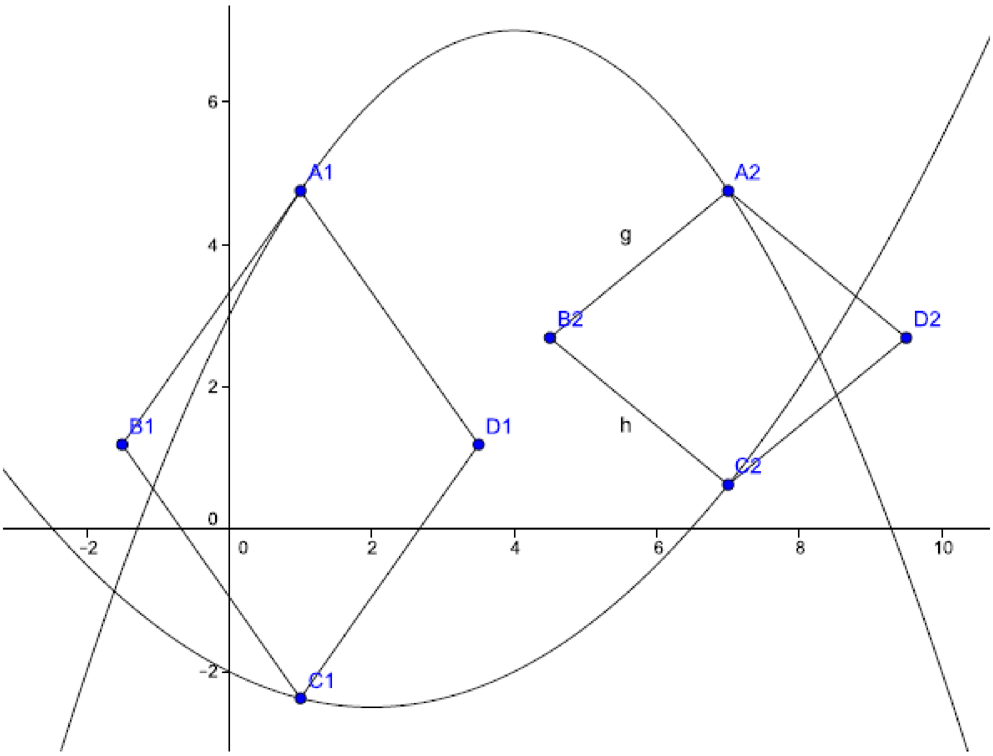
Zeichnung zu B 1.1; B 1.2

Wertetabelle der Parabel p_1: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$

x	– 2	– 1	0	1	2	4	6	8
$y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$	– 2	0,75	3	4,75	6	7	6	3

Wertetabelle der Parabel p_2: $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$

x	– 2	– 1	0	1	2	4	6	8
$y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$	- 0,5	-1,375	- 2	- 2,375	- 2,5	- 2	- 0,5	0,625



B 1.1 Aufstellen der Funktionsgleichung von p_1
Punktprobe mit P(-2|-2) (I) und Q(8|3) (II)

(I) $-2 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + 3$
$-2 = 4a - 2b + 3 \quad | -3$
$-5 = 4a - 2b$

(II) $3 = a \cdot 8^2 + 8b + 3$
$3 = 64a + 8b + 3 \quad | -3$
$0 = 64a + 8b \quad | -8b$
$-8b = 64a \quad | :(-8)$

(III) $b = -8a$

Einsetzen

(III) in (I):
$-5 = 4a - 2(-8a)$
$-5 = 4a + 16a$
$-5 = 20°$ | :20

(IV) $a = -\frac{1}{4}$

(IV) in (III):
$b = -8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$
$b = 2$
Mit diesen Werten für a und b ergibt sich die Funktionsgleichung für p_1:

p_1: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$

B 1.2 Berechnung der Koordinaten der Eckpunkte der Rauten
Die Punkte A_1 und A_2 liegen auf p_1, sodass sich ergibt:

$x_1 = 1$: $y_1(1) = -\frac{1}{4}\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + 3 = \frac{19}{4} \Rightarrow A_1\left(1\middle|\frac{19}{4}\right) = (1|4{,}75)$

$x_2 = 7$: $y_2(7) = -\frac{1}{4}\cdot 7^2 + 2\cdot 7 + 3 = \frac{19}{4} \Rightarrow A_2\left(7\middle|\frac{19}{4}\right) = (7|4{,}75)$

Die Punkte C_1 und C_2 liegen auf p_2, sodass sich ergibt:

$x_1 = 1$: $y_2(1) = \frac{1}{8}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 1 - 2 = -\frac{19}{8} \Rightarrow C_1\left(1\middle|-\frac{19}{8}\right) = (1|-2{,}375)$

$x_2 = 7$: $y_2(7) = \frac{1}{8}\cdot 7^2 - \frac{1}{2}\cdot 7 - 2 = \frac{5}{8} \Rightarrow C_2\left(7\middle|\frac{5}{8}\right) = (7|0{,}625)$

Um die Koordinaten der Punkte B_n und D_n zu ermitteln, benutze die Eigenschaft der Raute: Die Diagonalen halbieren sich und stehen senkrecht aufeinander.
Da die Punkte An und Cn die gleiche x-Koordinate haben, ist die Diagonale zwischen ihnen parallel zur y-Achse. Die Diagonalenmittelpunkte sind M1 und M2. Sie berechnen sich durch Halbieren der Differenz der y-Werte:
$M_1(1|1{,}1875)$; $M_2(7|2{,}6875)$
Die Diagonalen $\overline{B_1D_1}$ und $\overline{B_2D_2}$ sind 5 LE lang.
Die x-Koordinaten von B_1 und B_2 ergeben sich also durch Subtraktion von 2,5 zur x-Koordinate der Punkte M_1 und M_2; die x-Koordinaten von D_1 und D_2 durch Addition von 2,5.
$B_1(-1{,}5|1{,}1875)$; $B_2(4{,}5|2{,}6875)$
$D_1(3{,}5|1{,}1875)$; $D_2(9{,}5|2{,}6875)$

B 1.3
$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$

$y_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$

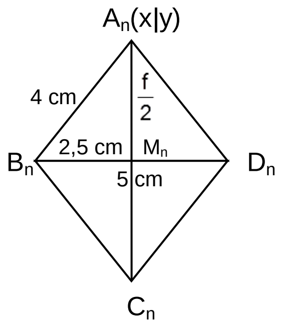
$\overline{A_nC_n}(x) = y_1 - y_2$

$\overline{A_nC_n}(x) = [-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3] - [\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 2]$

$\overline{A_nC_n}(x) = [-\frac{3}{8}x^2 + 2{,}5x + 5]$ LE

$\overline{A_nC_n}(x) = [-0{,}375x^2 + 2{,}5x + 5]$ LE

B 1.4



$\overline{A_3B_3} = \overline{A_4B_4} = 4$ LE

Mit dem Satz des Pythagoras gilt:

$4^2 = \left(\frac{1}{2}\overline{A_nC_n}\right)^2 + 2{,}5^2$, also

$\frac{1}{2}\overline{A_nC_n} = \sqrt{4^2 - 2{,}5^2} = 3{,}12$, also $\overline{A_nC_n} = 6{,}24$ LE

Mit dem Ergebnis aus B 1.3 folgt

$6{,}24 = [-0{,}375x^2 + 2{,}5x + 5]$ LE $\quad | -6{,}24$

$0 = -0{,}375x^2 + 2{,}5x - 1{,}24 \quad | : (-0{,}375)$

$0 = x^2 - 6{,}667x + 3{,}31$

Lösen mit der pq-Formel:

$x_{3,4} = 3{,}33 \pm \sqrt{3{,}33^2 - 3{,}31}$

$x_{3,4} = 3{,}33 \pm 2{,}79$

$x_3 = 6{,}12 \Rightarrow y_3(6{,}12) = 5{,}88$: $A_3(6{,}12|5{,}88)$

$x_4 = 0{,}54 \Rightarrow y_4(0{,}54) = 4{,}01$: $A_4(0{,}54|4{,}01)$

B 1.5 Die maximale Länge der Diagonalen entspricht dem Scheitelpunkt der Funktion $\overline{A_nC_n}(x)$.

$\overline{A_nC_n}(x) = -0{,}375x^2 + 2{,}5x + 5$

$\overline{A_nC_n}(x) = -0{,}375\left(x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{40}{3}\right)$

$\overline{A_nC_n}(x) = -0{,}375\left(\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{40}{3} - \frac{100}{9}\right)$

$\overline{A_nC_n}(x) = -0{,}375\left(\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{220}{9}\right)$

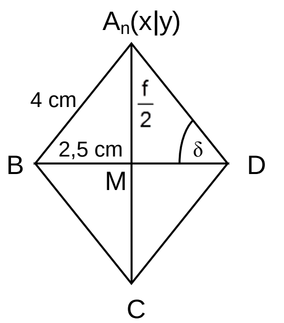
Der Scheitel ist also $S\left(\frac{10}{3}\middle|\frac{55}{6}\right)$

Die Diagonale erreicht ihre maximale Länge von $\frac{55}{6} = 9{,}17$ LE bei $x = \frac{10}{3}$.

Berechnung des Flächeninhalts der Raute

$A_{Raute} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}17 \cdot 5 = 22{,}925$ FE

B 1.6



Das Maß des Winkels $A_nD_nM_n$ sei δ. Es gilt dann

$\tan\delta = \frac{\overline{AM}}{\overline{DM}}$

$\overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{BD} = 2{,}5\ LE$

$\overline{AM}_{max} = \frac{1}{2}\overline{AC}_{max} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}17 = 4{,}59\ LE$

δ kann damit maximal 61,42° groß werden.

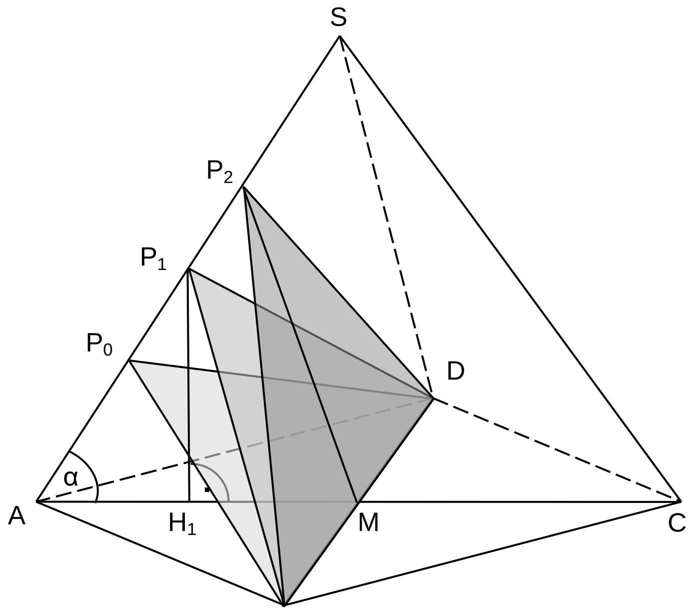
Aufgabe B2

B 2.0 Gegeben: $\overline{AC} = 12\text{cm} \Rightarrow \overline{AM} = \overline{CM} = 6$ cm

$\overline{BD} = 8$ cm $\Rightarrow \overline{BM} = \overline{DM} = 4$ cm

$\overline{MS} = 9$ cm (Höhe der Pyramide)

Zeichnung zu 2.1; 2.2; 2.5



B 2.1 Konstruktionsanleitung:
Zeichne AC = 12 cm in der Waagrechten.
Markiere ihre Mitte M.
Errichte in M eine Senkrechte mit 9 cm Länge (Punkt S).
Zeichne in M unter einen Winkel von 45° die Diagonale BD der Raute.

Die Länge BM ist $4 \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ cm

Miss von M aus die Längen auf der um 45° geneigten Diagonalen der Raute ab und du erhältst die Eckpunkte B und D..
Verbinde S mit A, B, C, D so erhältst du das Schrägbild der Pyramide ABCDS

Bestimmung der Länge von $\overline{AS}$:

$\overline{AS}^2 = \overline{MS}^2 + \overline{AM}^2 \Rightarrow \overline{AS}^2 = 9^2 + 6^2$

$\overline{AS} = 10{,}82$ cm

Bestimmung des Maßes α des Winkels CAS:

$\sin\alpha = \frac{\overline{MS}}{\overline{AS}} = \frac{9}{10{,}82} = 0{,}8318 \Rightarrow \alpha = 56{,}31°$

oder:

$\tan\alpha = \frac{\overline{MS}}{\overline{AM}} = \frac{9}{6} = 1{,}5 \Rightarrow \alpha = 56{,}31°$

B 2.2 Berechnung. von $\overline{P_1H_1}$:

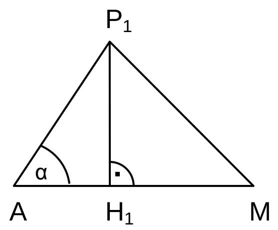
$\sin\alpha = \frac{\overline{P_1H_1}}{\overline{AP_1}} \Rightarrow$

$\overline{P_1H_1} = \overline{AP_1} \cdot \sin\alpha$

$\overline{P_1H_1} = 5 \cdot \sin 56{,}31°$

$\overline{P_1H_1} = 4{,}16$ cm

Schnittdreieck der Pyramide $ABDP_1$



Berechnung von $\overline{AH_1}$:

$\overline{AH_1}^2 = \overline{AP_1}^2 - \overline{P_1H_1}^2$

$\overline{AH_1}^2 = 5^2 - 4{,}16^2$

$\overline{AH_1} = 2{,}77$ cm

Berechnung von $\overline{MH_1}$:

$\overline{MH_1} = \overline{AM} - \overline{AH_1}$

$\overline{MH_1} = 6 - 2{,}77$

$\overline{MH_1} = 3{,}23$ cm

Berechnung von $\overline{MP_1}$:

$\overline{MP_1}^2 = \overline{P_1H_1}^2 + \overline{MH_1}^2$

$\overline{MP_1}^2 = 4{,}16^2 + 3{,}23^2$

$\overline{MP_1} = 5{,}27$ cm

Berechnung des Volumens der Pyramide $ABDP_1$
Grundfläche:

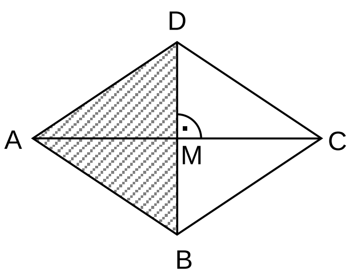
$G_{ABDP1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AM}$

$G_{ABDP1} = \frac{1}{2} \cdot 8\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 24\text{ cm}^2$

Volumen:

$V_{ABDP1} = \frac{1}{3} \cdot G_{ABDP1} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot G \cdot \overline{P_1H_1}$

$V_{ABDP1} = \frac{1}{3} \cdot 24\text{ cm}^2 \cdot 4{,}16\text{ cm} = 33{,}28\text{ cm}^3$



B 2.3 Berechnung des Volumens der Pyramide ABCDS
Grundfläche:

$G_{ABCDS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}$

$G_{ABCDS} = \frac{1}{2} \cdot 8\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} = 48\text{ cm}^2$

Volumen:

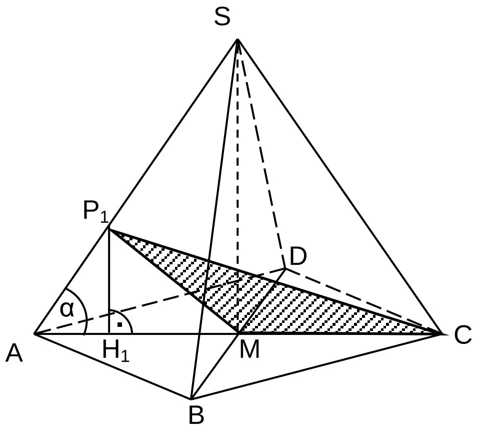
$V_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot G_{ABCDS} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot G \cdot \overline{MS}$

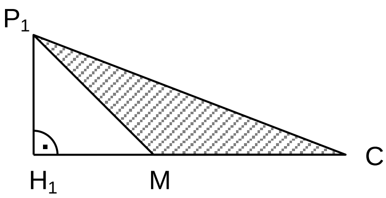
$V_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot 48\text{ cm}^2 \cdot 9\text{ cm} = 144\text{ cm}^3$

Prozentualer Anteil:

$p = \frac{33{,}28 \cdot 100}{144} = 23{,}11\ \%$

B 2.4





Von dem Dreieck MCP_1 sind folgende Maße bekannt:

$\overline{CM} = 6$ cm

$\overline{MP_1} = 5{,}27$ cm

$\overline{P_1H_1} = 4{,}16$ cm

$\overline{MH_1} = 3{,}23$ cm

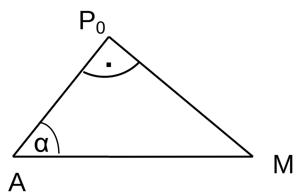
Die Strecke $\overline{P_1H_1}$ ist die Dreieckshöhe auf der Seite $\overline{CM}$. (Die Dreieckshöhe kann auch außerhalb des Dreiecks liegen). Damit gilt

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{P_1H_1}$

$A = \frac{1}{2} \cdot 6\text{ cm} \cdot 4{,}16\text{ cm} = 12{,}48\text{ cm}^2$

B 2.5

Bei der minimalen Länge $\overline{MP_0}$ steht die Strecke $\overline{MP_0}$ senkrecht auf $\overline{AS}$.
Das Dreieck AMP_0 ist also rechtwinklig.



Berechnung von $\overline{MP_0}$:

$\sin\alpha = \dfrac{\overline{MP_0}}{\overline{AM}}$

$\overline{MP_0} = \overline{AM} \cdot \sin\alpha$

$\overline{MP_0} = 6 \cdot \sin 56{,}31$

$\overline{MP_0} = 4{,}99$ cm

Das flächenkleinste Dreieck BDP_n ist das Dreieck BDP_0 mit

$h = \overline{MP_0} = 4{,}99$ cm

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{MP_0}$

$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4{,}99 = 19{,}96\text{ cm}^2$

Es gibt Dreieck BDP_n, mit einem Flächeninhalt kleiner als 19,96 cm², also auch keines mit einem Flächeninhalt von 18 cm².