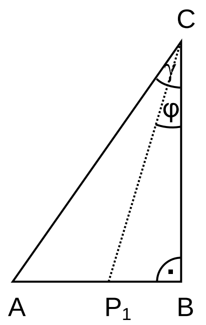
Prüfungsdauer: 150 Minuten

Diese Lösung wurde erstellt von Cornelia Sanzenbacher. Sie ist keine offizielle Lösung des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus.

Aufgaben

Aufgabe A1

A 1.1



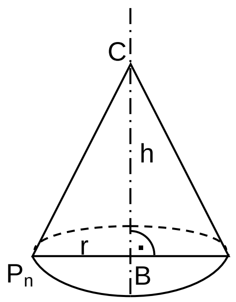
$\overline{AB} = 2{,}5\ \text{cm}$
$\overline{BC} = 3\ \text{cm}$

Begründung für $\varphi \in \,]0°;39{,}81°]$
Für den Winkel bei C mit dem Maß γ gilt

$$\tan\gamma = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2{,}5}{3} \Rightarrow \gamma = 39{,}81°$$

Für $\varphi = 39{,}81°$ ist $P_n = A$. Da die Punkte P_n auf [AB] liegen, kann φ nicht größer werden.
Deshalb gilt als obere Intervallgrenze für $\varphi = 39{,}81°$.

A 1.2



Es entsteht ein Kegel mit der Höhe $h = \overline{BC} = 3$ cm.

Der Grundkreisradius dieses Kegels ist $r = \overline{P_nB}$.
Berechnung der Länge von r

$$\tan\varphi = \frac{\overline{P_nB}}{\overline{BC}}$$

$$\overline{P_nB} = \overline{BC} \cdot \tan\varphi$$

$$\overline{P_nB} = 3 \cdot \tan\varphi$$

Damit ergibt sich für das Volumen des Kegels:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3 \cdot \tan\varphi)^2 \cdot 3$$

$$V = 9\,\pi \cdot \tan^2\varphi\ \text{cm}^3$$

A 1.3

Berechnung von φ für das Volumen $V = 6\ \text{cm}^3$:

$6 = 9\,\pi \cdot \tan^2\varphi \qquad | : 9\,\pi$

$\frac{6}{9\pi} = \tan^2\varphi \qquad | \sqrt{}$

$\tan\varphi = 0{,}4607$

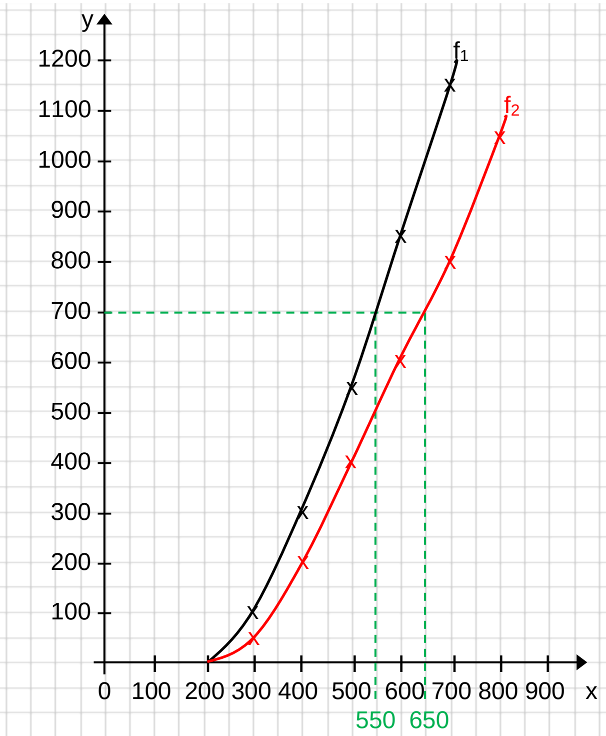
$\varphi = 24{,}73°$

Aufgabe A2

A 2.1
$f_1: y = 0{,}188807 \cdot (x - 210)^{1{,}41}$
Definitionsmenge: $D = \{x | x \geq 210\}$
Wertetabelle:

x	210	300	400	500	600	700	800
y	0	107,5	308,4	559,8	850	1172,7	1523,8

Graph der beiden Funktionen



A 2.2
Abgelesene Werte: $f_1(550) = 700$ (Frau); $f_2(650) = 700$ (Mann)
Der Mann ist etwa 100 cm = 1 m weiter gesprungen als die Frau

A 2.3
Frau mit 900 Punkten, es gilt $f_1: y = 0{,}188807 \cdot (x - 210)^{1{,}41}$
Berechnung der Sprungweite:

$900 = 0{,}188807\,(x - 210)^{1{,}41}$ | : 0,188807

$4766{,}77 = (x - 210)^{1{,}41}$ | $\sqrt[1{,}41]{}$ (entspricht hoch $\frac{1}{1{,}41}$)

$406{,}13 = x - 210$ | + 210

$x = 616{,}13$

Die Frau ist etwa 616 cm weit gesprungen.

A 2.4
$h_1: y_1 = 0{,}44125\,(x - 100)^{1{,}35}$ (Frauen)
$h_2: y_2 = 0{,}2797\,(x - 100)^{1{,}35}$ (Männer)

Es gilt
$y_1 = y_2 + 500$

Einsetzen der Funktionsgleichungen ergibt:

$0{,}44125\,(x-100)^{1{,}35} = 0{,}2797\,(x-100)^{1{,}35} + 500 \qquad |\,-0{,}2797(x-100)^{1{,}35}$

$0{,}16155\,(x-100)^{1{,}35} = 500 \qquad |\,:0{,}16155$

$(x-100)^{1{,}35} = 3095{,}017 \qquad |\,\sqrt[1{,}35]{}$

$x-100 = 385{,}19 \qquad |\,+100$

$x = 485{,}19$

Beide haben etwa 485 cm übersprungen.

Aufgabe A3

A 3.0 $g\colon y = -\frac{1}{4}x;\quad x \in\,]\,0;\,7{,}8\,[\,;\quad B_n\left(x\middle|-\frac{1}{4}x\right);\quad A(0|0);\quad C(4{,}5|3)$

A 3.1 1. Berechnung der Koordinaten von B_1:

$x = 2 \Rightarrow y(2) = -\frac{1}{4}\cdot 2 = -0{,}5$

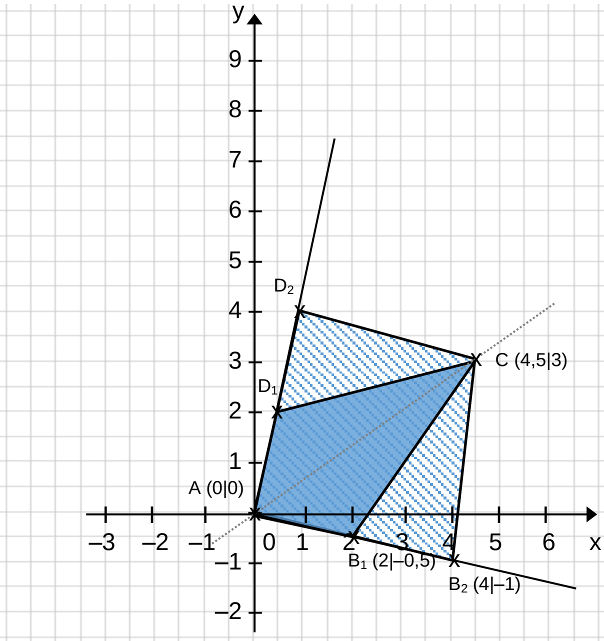
$B_1\,(2|-0{,}5)$

2. Berechnung der Koordinaten von B_2:

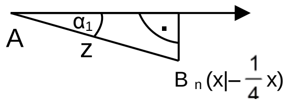
$x = 4 \Rightarrow y(4) = -\frac{1}{4}\cdot 4 = -1$

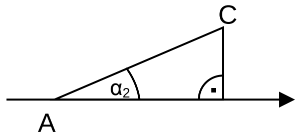
$B_2(4|-1)$

Die Punkte D_1 und D_2 erhält man durch Achsenspiegelung von B_1 und B_2 an der Achse AC.



A 3.2 Berechnung der Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von x_B:





Berechnung des Abstands z der Punkte B vom Ursprung A:

$z^2 = x^2 + \left(-\frac{1}{4}x\right)^2 \implies z^2 = x^2 + \frac{1}{16}x^2$

$z = \sqrt{\frac{17}{16}x^2}$

$z = \frac{x}{4}\sqrt{17}$

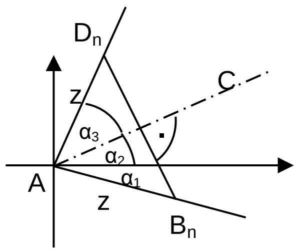
Berechnung von α_1:

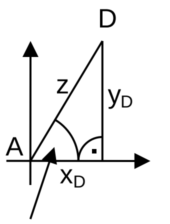
$\tan\alpha_1 = \frac{-\frac{1}{4}x}{x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \alpha_1 = 14°$

Berechnung von α_2:

$\tan\alpha_2 = \frac{3}{4{,}5} \Rightarrow \alpha_2 = 33{,}7°$

Die Punkte D_n entstehen aus B_n durch Spiegelung an der Achse AC.
Die Strecke AD bildet den Winkel α mit der x-Achse





$\alpha_2 + \alpha_3 = 81{,}4°$

Aus Symmetriegründen gilt:

$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = 14° + 33{,}7° \implies \alpha_3 = 47{,}7°$

$\alpha = \alpha_2 + \alpha_3 = 81{,}4°$

Damit kann man nun x- und y-Komponente von D_n berechnen:

Berechung von x_D:

$\cos 81{,}4° = \frac{x_D}{z} = \frac{x_D}{\frac{x}{4}\sqrt{17}} \implies x_D = 0{,}1541x$

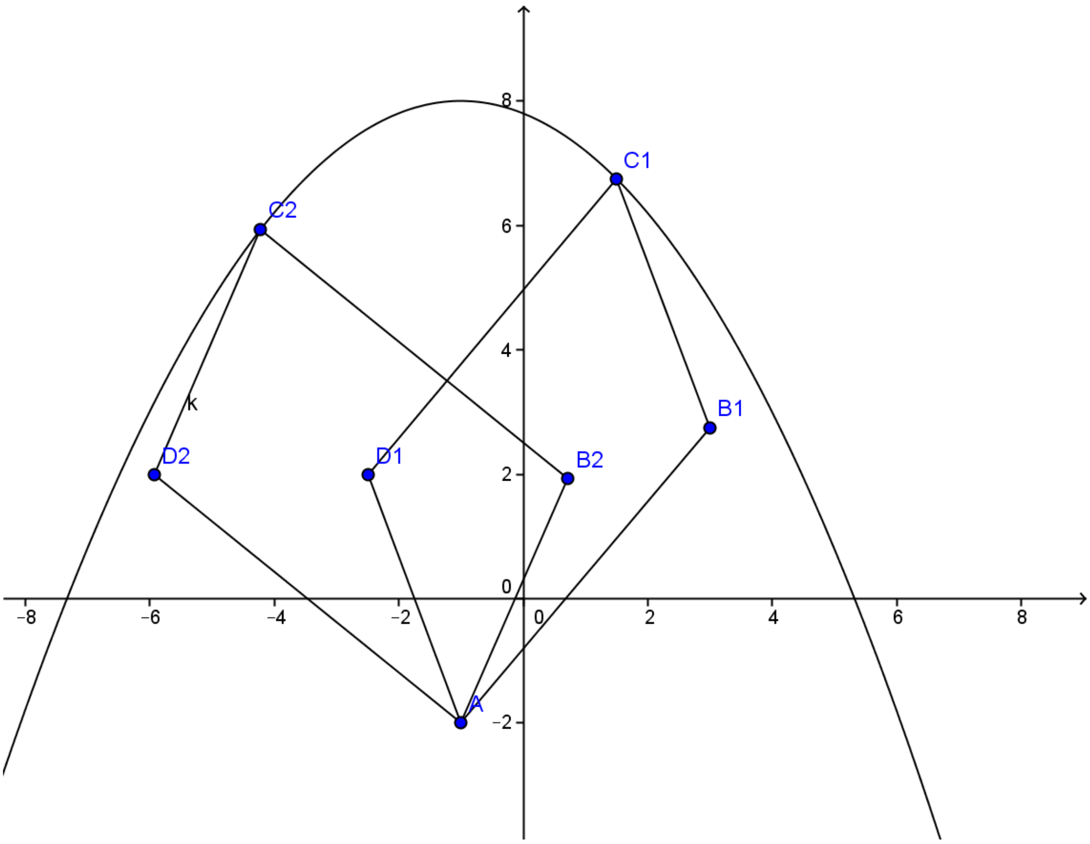
Berechnung von y_D

$\sin 81{,}4° = \frac{y_D}{z} = \frac{y_D}{\frac{x}{4}\sqrt{17}} \implies y_D = 1{,}019x$

Für die Punkte D_n gilt also $D_n(0{,}15x|1{,}02x)$.

Aufgabe B1

Zeichnung zu B1.1 und B1.4



B 1.1

Es gilt $\cos 60° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Daraus folgt

$\overrightarrow{AB}_1(60°) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos 60° + 3 \\ 5 \cdot (\sin 60°)^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4{,}75 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD}_1(60°) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos 60° - 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Für φ = 130° ergibt sich

$\overrightarrow{AB}_2(130°) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos 130° + 3 \\ 5 \cdot (\sin 130°)^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}71 \\ 3{,}93 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD}_2(130°) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos 130° - 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}93 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vom Punkt A(–1|–2) ausgehend, ergeben sich damit die folgenden Koordinaten für B_1, D_1, B_2, D_2:

$B_1 = \begin{pmatrix} -1 + 4 \\ -2 + 4{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}75 \end{pmatrix}$; $D_1 = \begin{pmatrix} -1 - 1{,}5 \\ -2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$;

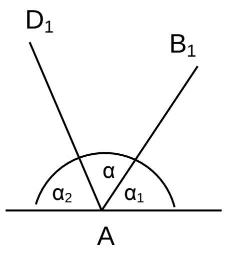
$B_2 = \begin{pmatrix} -1 + 1{,}71 \\ -2 + 3{,}93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}71 \\ 1{,}93 \end{pmatrix}$; $D_2 = \begin{pmatrix} -1 - 4{,}93 \\ -2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}93 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Eckpunkte C1 und C2 errechnet man, indem man an den Punkt A die beiden Pfeile $\overrightarrow{AB}_1$ und $\overrightarrow{AD}_1$ bzw. $\overrightarrow{AB}_2$ und $\overrightarrow{AD}_2$ anfügt:

$C_1 = \begin{pmatrix} -1 + 4 - 1{,}5 \\ -2 + 4{,}75 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 6{,}75 \end{pmatrix}$

$C_2 = \begin{pmatrix} -1 + 1{,}71 - 4{,}93 \\ -2 + 3{,}93 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}22 \\ 5{,}93 \end{pmatrix}$

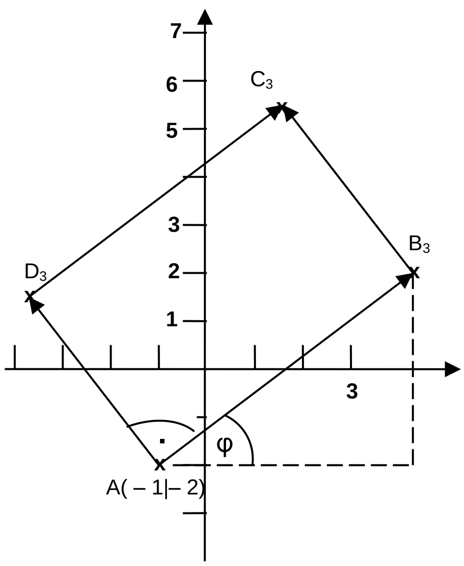
B 1.2
Berechnung des Winkels $B_1AD_1 = \alpha$:



$\tan\alpha_1 = \frac{y_{B1}-y_A}{x_{B1}-x_A} = \frac{4{,}75}{4} \Rightarrow \alpha_1 = 50°$
$\tan\alpha_2 = \left|\frac{y_{D1}-y_A}{x_{D1}-x_A}\right| = \left|\frac{4}{-1{,}5}\right| \Rightarrow \alpha_2 = 69{,}44°$

$\alpha = 180 - \alpha_1 - \alpha_2$
$\alpha = 180° - 50° - 69{,}4°$
$\alpha = 60{,}6°$

B 1.3



$\overrightarrow{AB_3}$ und $\overrightarrow{AD_3}$ müssen senkrecht aufeinander stehen, es gilt also
$\overrightarrow{AD_3} \times \overrightarrow{AB_3} = 0$
$\begin{pmatrix} 2\cdot\cos\varphi + 3 \\ 5\cdot sin^2\varphi + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\varphi - 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$
$(2\cdot\cos\varphi + 3)\cdot(3\cdot\cos\varphi - 3) + (5\cdot\sin^2\varphi + 1)\cdot 4 = 0$
$6\cos^2\varphi - 6\cos\varphi + 9\cos\varphi - 9 + \mathbf{20\sin^2\varphi + 4 = 0}$
Mit $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ folgt
$6\cos^2\varphi + 3\cos\varphi - 5 + 20\cdot(\mathbf{1 - \cos^2\varphi}) = 0$
$6\cos^2\varphi + 3\cos\varphi - 5 + 20 - 20\cos\varphi = 0$
$-14\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 15 = 0$
Mit der Mitternachtsformel gelöst:
$\cos\varphi = -0{,}9334\ldots$
$\varphi = 158{,}98°$

B 1.4 $\overrightarrow{0C_n} = \overrightarrow{0A} \oplus \overrightarrow{AB_n} \oplus \overrightarrow{A_nB_n}$ mit $\overrightarrow{B_nC_n} = \overrightarrow{AD_n}$

$\overrightarrow{0C_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2\cdot\cos\varphi + 3 \\ 5\cdot\sin^2\varphi + 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\varphi - 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{0C_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos\varphi + 3\cdot\cos\varphi - 1 + 3 - 3 \\ 5\cdot\sin^2\varphi - 2 + 1 + 2 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{0C_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 5\cdot\cos\varphi - 1 \\ 5\cdot\sin^2\varphi + 3 \end{pmatrix}$
Für die Punkte C_n gilt dann:
$C_n(5\cdot\cos\varphi - 1 \mid 5\cdot\sin^2\varphi + 3)$
Durch Gleichsetzen erhält man die Funktionsgleichung der Parabel p:

$C_n(x|y) \Rightarrow x = 5\cdot\cos\varphi - 1 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x+1}{5}$ (eingesetzt in y)
$y = 5\cdot\sin^2\varphi + 3 \Rightarrow y = 5\cdot(1 - \cos^2\varphi) + 3 = 5 - 5\cdot\cos^2\varphi + 3$
Einsetzen des Ausdrucks für cos φ:
$y = -5\cdot\left(\frac{x+1}{5}\right)^2 + 8$
$y = -5\cdot\frac{1}{25}(x+1)^2 + 8 = -\frac{1}{5}(x+1)^2 + 8$

Für den Trägergraph gilt also:

p: $y = -0{,}2\cdot(x+1)^2 + 8$

Wertetabelle x	– 6	– 4	– 2	– 1	0	2	4	6
$y = -0{,}2\cdot(x+1)^2 + 8$	3	6,2	7,8	8	7,8	6,2	3	–1,8

B 1.5 $\overrightarrow{0D_n} = \overrightarrow{0A} \oplus \overrightarrow{AD_n}$

$\overrightarrow{0D_n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\varphi - 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{0D_n} = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\varphi - 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$D_n(3\cdot\cos\varphi - 4 \mid 2)$

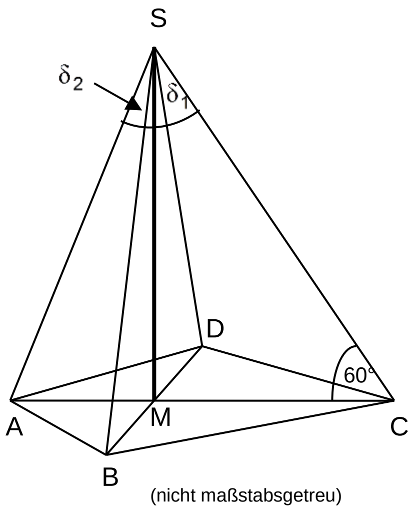
D_n soll nun auf p liegen, man macht also eine Punktprobe von D_n in p:

$2 = -0{,}2\cdot(3\cdot\cos\varphi - 4 + 1)^2 + 8$
$0{,}2\cdot(3\cdot\cos\varphi - 3)^2 - 6 = 0$
$0{,}2(9\cdot\cos^2\varphi - 18\cdot\cos\varphi + 9) - 6 = 0 \qquad |:0{,}2$
$(9\cdot\cos^2\varphi - 18\cdot\cos\varphi + 9) - 30 = 0$
$9\cdot\cos^2\varphi - 18\cdot\cos\varphi - 21 = 0$

Mit der Mitternachtsformel gelöst:
$\cos\varphi = -0{,}8257$ [oder 2,8257]
$\varphi = 145{,}66°$

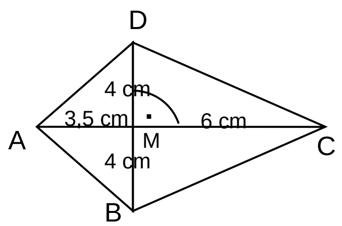
Aufgabe B2

B 2.0



(nicht maßstabsgetreu)

Gegeben:
$\overline{AC} = 9{,}5$ cm
$\overline{AM} = 3{,}5$ cm
$\overline{BD} = 8$ cm
Winkel SCA = 60°



Für die Zeichnung beginnst du mit AC = 9,5 cm und kennzeichnest M mit $\overline{AM} = 3{,}5$ cm. In M legst du einen Winkel von 45° an und markierst in 2 cm Länge den Punkt D. Der Punkt B liegt punktsymmetrisch von D zu M.
Zeichne in C einen Winkel von 60°. Errichte in M die Pyramidenhöhe, welche den freien Schenkel des 60° Winkels in S schneidet. Verbinde die Punkte ABCDS.

B 2.1

1. Berechnung von $\overline{MC}$:

$\overline{MC} = \overline{AC} - \overline{AM}$

$\overline{MC} = 9{,}5 - 3{,}5$

$\overline{MC} = 6$ cm

2. Berechnung vom $\overline{SM}$:

$\tan 60° = \dfrac{\overline{SM}}{\overline{MC}}$

$\overline{SM} = \overline{MC} \cdot \tan 60°$ $\quad$ | $\tan 60° = \sqrt{3}$

$\overline{SM} = 6 \cdot \sqrt{3}$

$\overline{SM} = 10{,}39$ cm

3. Berechnung von $\overline{SC}$:

$\overline{SC} = \sqrt{\overline{SM} + \overline{MC}}$

$\overline{SC} = \sqrt{6^2 + 10{,}39^2}$

$\overline{SC} = 12{,}00$ cm

4. Berechnung von δ_1 und δ_2

$\delta_1 = 90° - 60° = 30°$

$\tan \delta_2 = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{SM}} = \dfrac{3{,}5}{10{,}39}$

$\delta_2 = 18{,}62°$

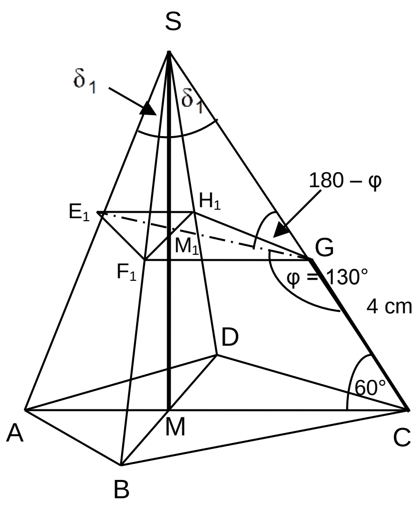
5. Berechnung von δ (Maß des Winkels ASC):

$\delta = \delta_1 + \delta_2$

$\delta = 30° + 18{,}62°$

$\delta = 48{,}62°$

B 2.2



(nicht maßstabsgetreu)

Zeichne G auf $\overline{SC}$ mit $\overline{CG} = 4$ cm.

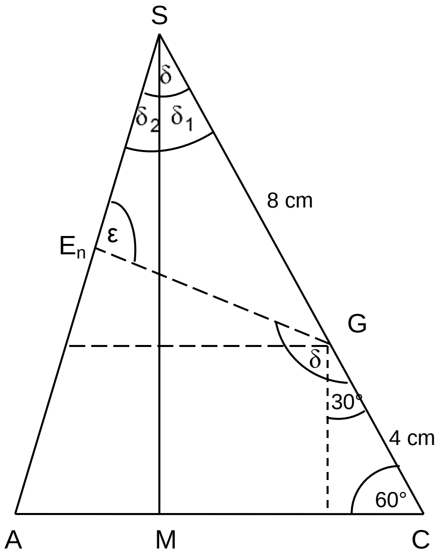
Zeichne in G an $\overline{CG}$ den Winkel $\varphi = 130°$.

Sein freier Schenkel schneidet $\overline{AS}$ im Punkt E_1.

Im Schnittpunkt von $\overline{E_1G}$ mit der Pyramidenhöhe liegt M_1.

Die Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{F_1H_1}$ sind parallel. Zeichne durch M_1 eine Parallel zu $\overline{BD}$. Sie schneidet die Seitenkanten $\overline{BS}$ und $\overline{DS}$ in den gesuchten Ecken des Drachens, F_1 und H_1.

B 2.3



Berechnung von $\overline{SG}$:

$\overline{SG} = \overline{SC} - \overline{CG}$

$\overline{SG} = 12 - 4 = 8$ cm

Berechnung von ε:

$\varepsilon = 180 - \delta - (180 - \varphi)$; $\delta = 48{,}62°$

$\varepsilon = 180 - 48{,}62 - (180 - \varphi)$

$\varepsilon = \varphi - 48{,}62°$

Berechnung von $\overline{E_nG}$:

Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{\overline{E_nG}}{\sin\delta} = \frac{\overline{SG}}{\sin\varepsilon}$$

$$\overline{E_nG} = \frac{\overline{SG}\cdot\sin\delta}{\sin(\varphi - 48{,}62°)} = \frac{8\cdot\sin 48{,}62°}{\sin(\varphi - 48{,}62°)}$$

$8\cdot\sin 48{,}62° = 6{,}0027$, also

$$\overline{E_nG} = \frac{6{,}00}{\sin(\varphi - 48{,}62°)}$$

Bestimmung der minimalen Länge $\overline{E_0G}$:

Minimale Länge bedeutet, dass $\overline{E_0G} \perp \overline{E_0S}$

$\Rightarrow$ $\varepsilon = 90°$;

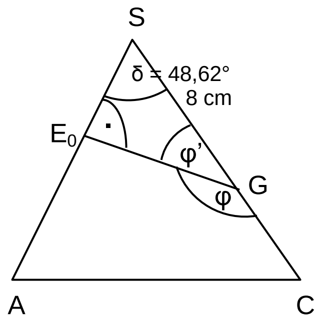
$\Rightarrow$ $\sin\varepsilon = \sin(\varphi - 48{,}62°) = \sin 90° = 1$

$$\overline{E_nG} = \frac{6{,}00}{\sin(\varphi - 48{,}62°)} = \frac{6{,}00}{1} = 6 \text{ cm}$$

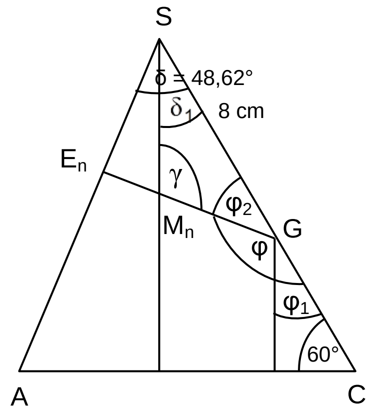
Berechnung des zugehörigen Winkels φ:

$\varphi' = 90° - 48{,}62° = 41{,}38°$

$\varphi = 180° - \varphi' = 180 - 41{,}38° = 138{,}62°$



B 2.4



Berechnung von $\overline{SM_n}$:

$\varphi_1 = 90° - 60° = 30°$

$\varphi_2 = 180° - \varphi$

$\delta_1 = 30°$ (Wechselwinkel zu φ_1)

$\gamma = 180° - \delta_1 - \varphi_2$

$\gamma = 180° - 30° - (180° - \varphi)$

$\gamma = \varphi - 30°$

Sinussatz im Dreieck SM_nG

$$\frac{\overline{SM_n}}{\sin\varphi_2} = \frac{\overline{SG}}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\overline{SM_n}}{\sin(180°-\varphi)} = \frac{\overline{SG}}{\sin(\varphi-30°)}$$

Es gilt sin(180 – φ) = sin φ und damit

$$\overline{SM_n} = \frac{\overline{SG}\cdot\sin\varphi}{\sin(\varphi-30°)} = \frac{8\cdot\sin\varphi}{\sin(\varphi-30°)}$$

Berechnung von $\overline{F_nH_n}$

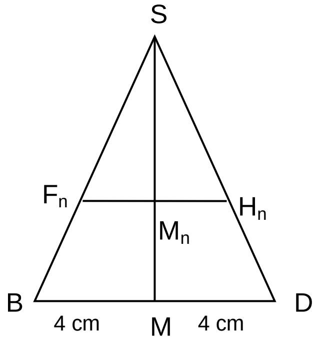
Mit dem Strahlensatz gilt

$$\frac{\overline{F_nH_n}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SM_n}}{\overline{SM}}$$

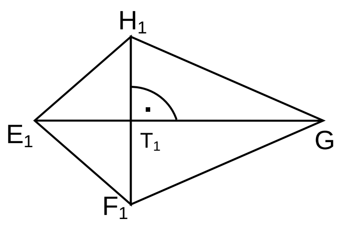
$$\frac{\overline{F_nH_n}}{8} = \frac{8\cdot\sin\varphi}{10{,}39\cdot\sin(\varphi-30°)}$$

$$\overline{F_nH_n} = \frac{8\cdot 8\cdot\sin\varphi}{10{,}39\cdot\sin(\varphi-30°)}$$

$$\overline{F_nH_n} = 6{,}16\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-30°)}$$



B 2.5 $G_{Pyramide}$: Drachen $E_1F_1GH_1$



Berechnungen für φ = 130°

$$\overline{E_1G} = \frac{6{,}00}{\sin(130°-48{,}62°)} = \frac{6{,}00}{\sin 81{,}38°} = 6{,}09\text{ cm}$$

$$\overline{F_1H_1} = 6{,}16\cdot\frac{\sin 130°}{\sin(130°-30°)} = 4{,}79\text{ cm}$$

Berechnung von $\overline{T_1S}$:

$\sin(180°-130°) = \frac{\overline{T_1S}}{\overline{SG}} \Rightarrow \overline{T_1S} = 8 \cdot \sin 50° = 6{,}13$ cm

Berechnung des Volumens der Pyramide:

$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \overline{E_1G} \cdot \overline{F_1H_1}\right) \cdot \overline{T_1S} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6{,}07 \cdot 4{,}79 \cdot 6{,}13$

$V = 29{,}71\ \text{cm}^3$